100 lat PTM

geometria różniczkowa i grupy Liego

patroni sesji

Stanisław Gołąb, Antoni Hoborski, Władysław Ślebodziński

rok zał. 1919

ptm

Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich
w stuleciu Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Kraków 3 -7 września 2019

Indeks abstraktów

Niezmienniki brzegowe i rozdzielanie symetralnych w zespolonej przestrzeni hiperbolicznej

Maciej Czarnecki mail@myserver.com
Uniwersytet Łódzki

W zespolonej przestrzeni hiperbolicznej $\mathbb{C}H^n$ symetralną nazywamy zbiór punktów równo odległych od dwóch punktów. Każda symetralna jest wyznaczona jednoznacznie przez parę swoich wierzchołków (czyli punktów na brzegu idealnym przestrzeni $\mathbb{C}H^n$), a więc także przez swój kręgosłup będący geodezyjną łączącą wierzchołki.

W referacie zaprezentujemy związek zespolonego dwustosunku i niezmiennika Goldmana z zagadnieniem rozdzielania symetralnych oraz ich współzależności z położeniem kręgosłupów.

Bibliografia

[1]. W. Goldman, *Complex Hyperbolic Geometry*, OUP, Oxford, 1999.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Generalized Calabi type Kähler surfaces

Włodzimierz Jelonek wjelon@pk.edu.pl
Politechnika Krakowska

Co-author:
Ewelina Mulawa ewelina.mulawa@pk.edu.pl
Politechnika Krakowska

In the talk we give the classification of generalized Calabi type Kähler surfaces, the class of QCH Kähler surfaces whose opposite almost Hermitian structure is Hermitian and is determined by complex foliation by curves.

References

[1]. V.Apostolov,D.M.J. Calderbank, P. Gauduchon, *The geometry of weakly self-dual Kähler surfaces*, Compos. Math.135, 279-322 (2003)

[2]. V.Apostolov and P.Gauduchon, *The Riemannian Goldberg-Sachs theorem*, Int. J. Math. **8**: 421–439 (1997).

[3]. A. Derdzinski,G. Maschler, *Special Kähler-Ricci potential on compact Kähler manifolds*, J. reine angew Math. **593**: 73–116 (2006).

[4]. A. Derdzinski,G. Maschler, *Local classification of conformally Einstein-Kähler metrics in higher dimensions*, Proc. London. Math. Soc 3: 779–819 (2003).

[5]. W. Jelonek, *Kähler surfaces with quasi-constant holomorphic curvature*, Glasgow Math. J **58**: 503–512 (2016).

[6]. W. Jelonek, *Semi-symmetric Kähler surfaces*, Colloq. Math. **156**: 1–12 (2017).

[7]. W. Jelonek, *Complex foliations and Kähler QCH surfaces*, Colloq. Math **156**: 229–242 (2019).
[8]. W. Jelonek, *Einstein-Hermitian and anti-Hermitian 4-manifolds*, Ann. Polon. Math **81**: 7–24 (2003).
[9]. W. Jelonek, *QCH Kähler surfaces II*, arxiv (2018).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Wzory Fussa w poryżmie Ponceleta

Witold Mozgawa mozgawa@poczta.umcs.lublin.pl
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej

Współautor:
Waldemar Cieślak izacieslak@wp.pl
Politechnika Lubelska

Niech C_1 i C_2 będą dwiema elipsami takimi, że elipsa C_1 zawiera w swoim wnętrzu elipsę C_2 oraz niech M_1 będzie punktem na C_1, zaś t_1 linią styczną do C_2 wyprowadzoną z punktu M_1. Wychodząc z pary (M_1, t_1) konstruujemy transwersalną Ponceleta, to jest ciąg $(M_1, t_1, M_2, t_2, M_3, t_3, \ldots)$ taki, że $M_i \in C_1$, zaś t_i jest linią styczną do elipsy C_2 oraz $M_{i+1} = t_i \cap t_{i+1}$. Mówimy, że transwersalna Ponceleta zamyka się po n krokach, jeśli $M_{n+1} = M_1$.

W latach 1813-1814 Jean Victor Poncelet wykazał następujące twierdzenie o zamknięciu zwane często poryzmem Ponceleta, [3], [1].

Twierdzenie *Jeśli transwersalna Ponceleta wychodząca z punktu $M_1 \in C_1$ zamyka się po n krokach, to transwersalna Ponceleta wychodząca z dowolnego innego punktu elipsy C_1 zamyka sie po n krokach.*

W tym referacie przestawimy dowód twierdzenia Ponceleta dla pierścieni kołowych wykorzystuąc jedynie funkcje elementarne i pewne równanie różniczkowe, które posiada rozwiązanie z odpowiednimi geometrycznymi własnościami. Podamy warunek konieczny i dostateczny na to, by istniało rozwiązanie stałe tego równania, co wyjaśnia zjawisko poryzmu Ponceleta.

Wzory algebraiczne, które gwarantuą zamykanie się transwersalnej Ponceleta dla pary okręgów o promieniach R, r i odległości d pomiędzy ich środkami nazywaą się wzorami Fussa. Nie jest znany ogólny, zwarty wzór Fussa dla dowolnego n, ale wszystkie takie znane wzory maą elementarną algebraiczną postać, w której występuą wielomiany zmiennych R, r i d oraz czasem pierwiastki kwadratowe. W drugiej części referatu opiszemy metodę wyznaczania wzoru Fussa dla dowolnego naturalnego n, która także pozwala wyznaczać te wzory dla transwersalnych Ponceleta z samoprzecięciami.

Bibliografia

[1]. H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort, D. W. Raven, *Poncelet's Closure Theorem*, Expos. Math., 5, 289–364, 1987.
[2]. W. Cieślak, W. Mozgawa, The Fuss formulas in the Poncelet porism. *Comput. Aided Geom. Des.*, 66, 19-30 (2018).

[3]. J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile a qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Vols. 1-2, 2nd ed. Paris: Gauthier-Villars, 1865–66.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Przekształcenie Bäcklunda dla powierzchni z niemetryzowalną koneksją lokalnie symetryczną

Maria Robaszewska maria.robaszewska@up.krakow.pl
Uniwersytet Pedagogiczny

Rozważamy niezdegenerowaną immersję $f : M^{(2)} \to \mathbb{R}^3$ wraz z ekwiafinicznym polem transwersalnym $\xi : M^{(2)} \to \mathbb{R}^3$. Zakładamy, że koneksja ∇ indukowana na $M^{(2)}$ przy pomocy formuły Gaussa

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\,\xi$$

jest lokalnie symetryczna oraz spełnia warunek $\dim \operatorname{im} R = 1$, gdzie R oznacza tensor krzywizny koneksji ∇.

Niech θ będzie elementem objętości indukowanym na $M^{(2)}$ przez (f, ξ): $\theta(X, Y) = \det(f_*(X), f_*(Y), \xi)$. Funkcja *wyznacznik afinicznej formy podstawowej* h *względem elementu* θ zdefiniowana jest jako

$$\det{}_\theta h = \det[h(X_i, X_j)]_{i,j\in\{1,2\}},$$

gdzie X_1, X_2 jest dowolną bazą unimodularną względem θ, tzn. $\theta(X_1, X_2) = 1$.

Dla lokalnej bazy X_1, X_2 wiązki TM przez $\omega^i{}_j$, $i, j \in \{1, 2\}$ oznaczamy lokalne formy koneksji, natomiast $\omega^3{}_i = h(\cdot, X_i)$. Formy ω^1, ω^2 stanowią lokalną bazę wiązki T^*M dualną do bazy X_1, X_2.

Jeśli wybierzemy bazę X_1, X_2 spełniającą warunki

$$X_2 \in \ker \operatorname{Ric}, \quad \operatorname{Ric}(X_1, X_1) = \varepsilon \in \{1, -1\}, \quad \theta(X_1, X_2) = 1, \tag{1}$$

to $d\omega^3{}_2 = 0$ oraz $\omega^3{}_2 \wedge d(\det_\theta h) = 0$. Można zatem lokalnie wybrać funkcję z taką, że $\omega^3{}_2 = dz$ i wówczas $\det_\theta h = H \circ z$ dla pewnej funkcji H jednej zmiennej.

Niech $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ będzie takie, że $1+\varepsilon\, a^2 \neq 0$. Niech L będzie rozwiązaniem równania Riccatiego

$$L' = \frac{1}{a} L^2 + \frac{1 + \varepsilon\, a^2}{a\, H} \tag{2}$$

i niech $\lambda = L \circ z$. Niech t będzie funkcją spełniającą

$$a\, dt = t\left(\omega^1 + \lambda\, \omega^3{}_2\right) + \lambda\, \omega^3{}_1 - \omega^2 - a\, \omega^2{}_1. \tag{3}$$

W lokalnych współrzędnych (3) jest układem równań różniczkowych cząstkowych z niewiadomą funkcją t. Układ ten jest całkowalny, jeśli L spełnia (2).

Używając funkcji t spełniającej (3) możemy zadać nową bazę

$$\widetilde{X}_1 = X_1 + t\,X_2, \quad \widetilde{X}_2 = X_2,$$

która, oprócz odpowiedników (1), spełnia również warunek

$$\widetilde{\omega}^2 + a\,\widetilde{\omega}^2{}_1 = \lambda\,\widetilde{\omega}^3{}_1.$$

Jeśli $h(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2) \neq 0$, to funkcja $\widehat{f}$ zadana wzorem

$$\widehat{f} = f + a\,f_*\widetilde{X}_1$$

jest niezdegenerowaną immersją, a

$$\widehat{\xi} = \xi + \frac{\varepsilon\,a}{1+\varepsilon\,a^2}\,\lambda\,f_*\widetilde{X}_2$$

jest ekwiafinicznym polem transwersalnym dla $\widehat{f}$. Koneksja $\widehat{\nabla}$ indukowana na $M^{(2)}$ przez parę $(\widehat{f}, \widehat{\xi})$ jest lokalnie symetryczna, $\dim \operatorname{im}\widehat{R} = 1$ oraz $\operatorname{sign}\widehat{\operatorname{Ric}} = \operatorname{sign}\operatorname{Ric}$.

Ponieważ dla każdego p wektor łączący odpowiadające sobie punkty $f(p)$ i $\widehat{f}(p)$ jest styczny zarówno do $f(M)$, jak i do $\widehat{f}(M)$, przekształcenie $f(p) \mapsto \widehat{f}(p)$ można nazwać przekształceniem Bäcklunda powierzchni f. W przypadku, gdy powierzchnia f jest stowarzyszona z rozwiązaniem pewnego równania różniczkowego, postać, którą przyjmie (3), można uważać za przekształcenie Bäcklunda tego równania.

Mając daną powierzchnię i ekwiafiniczne pole transwersalne, które na tej powierzchni indukuje koneksję lokalnie symetryczną spełniającą warunek $\dim \operatorname{im} R = 1$ możemy opisaną metodą skonstruować jednoparametrową rodzinę powierzchni wyposażonych w pola transwersalne indukujące koneksje o podobnych własnościach. Parametrem jest a.

Bibliografia

[1]. K. Nomizu i T. Sasaki, *Affine differential geometry*, Cambridge University Press, 1994.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

O zerach krzywizny izooptyk pewnych owali

Magdalena Skrzypiec mskrzypiec@hektor.umcs.lublin.pl
Uniwersytet im. Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

Izooptyki krzywych płaskich najczęściej rozważane są w postaci parametrycznej, zależnej od funkcji podparcia wyjściowej krzywej. Rozważymy izooptyki owali o funkcjach podparcia $p(t) = a + \cos nt$, $n \in \mathbb{Z}$ i ich krzywizny wzdłuż trajektorii ortogonalnych zaczynających się na osiach symetrii wyjściowych krzywych. Uogólnimy pojęcie kąta granicznego dla izooptyk i podamy przykłady krzywych, z badanej rodziny, których izooptyki mają więcej niż jeden kąt graniczny. Rozważymy też izooptyki elipsy zadane równaniem ogólnym i przedstawimy równanie krzywej przechodzącej przez te punkty płaszczyzny, w których krzywizna izooptyk elipsy się zeruje.

Bibliografia

[1]. Th. Dana-Picard, G. Mann and N. Zehavi, From conic intersections to toric intersections: the case of the isoptic curves of an ellipse, The Montana Mathematical Enthusiast 9 (1), 59-76, (2011).

[2]. A. Miernowski, W. Mozgawa, On some geometric condition for convexity of isoptics, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 55 no. 2, (1997), 93–98.

[3]. Theisel, H: *Vector Field Curvature and Applications (PhD thesis)*, 1996.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Godbillon-Vey type invariants for arbitrary plane fields

Paweł Walczak pawel.walczak@wmii.uni.lodz.pl
Uniwersytet Łódzki

The Godbillon-Vey cohomology class for foliations have been defined in [2], generalized in several ways later on, and occured to be a very important tool for the study of topology and dynamics of foliations, se e.g. [1, 6]. In [3], a Riemannian formula for a form defining this class has been estabilished.

In this talk, we shall present some results obtained jointly with Vladimir Rovenski (Haifa) [4, 5]. Given a plane field (integrable or not) on a Riemannian manifold, we define a particular differential form which – in the case of foliations – represents the Godbillon-Vey class – and provides – when integrated – a scalar invariant. We show that the Reinhart-Wood formula holds also in this case, study variantions of the scalar invariant under consideration, provide the Euler equation for the corresponding variational problem and discuss some examples.

References

[1]. A. Candel and L. Conlon, *Foliations I and II*, Amer. Math. Soc., Providence, 2000 and 2003.

[2]. C. Godbillon and J. Vey, *Un invariant des feilletages de codimension 1,* C. R. Acad. Sci. Paris **273**, 92 – 95 (1971).

[3]. B. Reinhart and J. Wood, *A metric formula for the Godbillon-Vey invariant for foliations*, Proc. Amer. Math. Soc. **38**, 427 – 430 (1973).

[4]. V. Rovenski and P. Walczak, *A Godbillon-Vey type invariant for a 3-dimensional manifold with a plane field*, arXiv:1707.04847.

[5]. V. Rovenski and P. Walczak, *Variations of the Godbillon-Vey invariant of a foliated manifold*, Complex Anal. and Operator Th., to appear.

[6]. P. Walczak, *Dynamics of Foliations, Groups and Pseudogroups*, Birkhäuser, Basel, 2004.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Topologia Gromowa-Haudsorffa dla uogólnionych przestrzeni metrycznych

Szymon Walczak szymon.walczak@ujk.edu.pl
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

Uogólnioną przestrzenią metryczną nazywa się parę (X, d) składającą się ze zbioru X i funkcji odległości $d : X \times X \to [0, \infty)$ spełniającej dla dowolnych $x, y, z \in X$ następujące warunki

[1]. $d(x, y) = d(y, x) = 0$ iff $x = y$,

[2]. $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$.

Zdefiniujemy odległość Gromowa-Hausdorffa dla uogólnionych przestrzeni metrycznych o dowolnym współczynniku asymetrii. Wykażemy, że każda przestrzeń o nieskończonym współczynniku asymetrii jest granicą ciągu Cauchy'ego uogólnionych przestrzeni metrycznych o skończonych współczynnikach asymetrii, zaś klasa uogólnionych przestrzeni metrycznych z metryką Gromowa-Hausdorffa nie jest zupełna. Przedstawimy również pewne wyniki dotyczące wzajemnych relacji klas uogólnionych przestrzeni metrycznych o ograniczonych współczynnikach asymetrii oraz pewne twierdzenia o prezwartości.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Tkaniny w geometrii unimodularnej

Marcin Zubilewicz m.zubilewicz@mini.pw.edu.pl
Politechnika Warszawska

Pod pojęciem n-tkaniny kryje się struktura geometryczna złożona z n foliacji znajdujących się w położeniu ogólnym. Własności lokalne tych obiektów istotne z punktu widzenia geometrii to te, które są niezmiennicze ze względu na działanie grupy odwzorowań zachowujących foliacje tkaniny. Grupa ta składa się najczęściej z odwzorowań gładkich lub holomorficznych, ale w ogólności nic nie stoi na przeszkodzie, by rozpatrywać inne klasy przekształceń.

Celem referatu jest opisanie zmian, jakie zachodzą w strukturze lokalnej tkanin, w chwili gdy klasę ich automorfizmów zawęzimy do grupy dyfeomorfizmów zachowujących ustaloną formę objętości. W porównaniu z klasyczną teorią, struktura lokalna tkanin kowymiaru 1 staje się istotnie bogatsza. Pokażę w jaki sposób, czerpiąc inspirację z wyników W. Blaschkego i G. Thomsena [1, Chapter 1.2], można skonstruować pewien lokalny niezmiennik geometryczny wiążący tkaninę z daną formą objętości, zwany *unimodularną holonomią*. Następnie przedstawię konstrukcję analogonu koneksji Cherna w geometrii unimodularnej, tj. naturalnej, beztorsyjnej koneksji afinicznej, względem której zarówno liście tkaniny, jak i forma objętości, są równoległe. Silny związek między tymi dwoma niezmiennikami pozwoli wykazać, że trywialność któregokolwiek z nich pociąga za sobą trywialność samej tkaniny.

Bibliografia

[1]. J. V. Pereira and L. Pirio, *An Invitation to Web Geometry*, Springer, Cham, 2015.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji