



matematyka obliczeniowa

patron sesji  
Andrzej Kietbasiński



Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich  
w stulecie **Polskiego Towarzystwa Matematycznego**  
Kraków 3 -7 września 2019

- 4 Michał Braś, Angela Cardone, Giuseppe Izzo, Zdzisław Jackiewicz, Paulina Pierzchała  
Otwarto-zamknięte ogólne metody liniowe dla równań różniczkowych zwyczajnych
- 4 Jacek Dębowski  
Optimal approximation of stochastic integrals with respect to a homogeneous Poisson process
- 5 Anna Dudek  
Block bootstrap methods for periodic processes
- 5 Maciej Goćwin  
Optymalne siatki adaptacyjne dla całkowania automatycznego
- 5 Michał Góra  
Pozytywne konsekwencje złego uwarunkowania zadania – wybrane twierdzenia teorii stabilności i odpornej stabilności wielomianów
- 6 Bolesław Kacewicz, Paweł Przybyłowicz  
Skończenie wymiarowe rozwiązywanie problemów początkowych w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha
- 7 Andrzej Kałuża, Paweł Morkisz, Paweł Przybyłowicz  
Optimal approximation of stochastic Itô integrals in the presence of informational noise
- 7 Marek Aleksander Kowalski  
Prolate spheroidals and their selected applications
- 8 Piotr Krzyżanowski  
Operatory ściskające dla nieciągłej metody Galerkina z różnymi typami penalizacji
- 9 Leszek Marcinkowski, Erik Eikeland, Talal Rahman  
An Adaptive Coarse Space for DG discretization of a heterogeneous elliptic problem
- 9 Paweł Morkisz  
Derivative-free randomized Milstein scheme for strong approximation of solutions of SDEs in analytic noise model
- 10 Paweł Pilarczyk  
Algorytmiczne obliczanie odwzorowania indukowanego w homologiach
- 10 Leszek Plaskota  
W poszukiwaniu wszystkich zer funkcji gładkich

- 11 Michał R. Przybytek  
Phaseless polynomial interpolation
- 11 Paweł Przybyłowicz, Raphael Kruse  
Optimal approximation of SDEs under fractional Sobolev regularity
- 12 Paweł Siedlecki  
Absolute value information for IBC problems
- 12 Irmina Waławska  
Period  $k$ -tupling bifurcations of periodic orbits with time reversing symmetry
- 12 Daniel Wilczak  
Validated integration of a class of dissipative PDEs
- 13 Henryk Woźniakowski  
Spolegliwość wielowymiarowego zadania Voltery
- 13 Piotr Zgliczyński  
Komputerowo wspierane dowody w dynamice

## Otwarto-zamknięte ogólne metody liniowe dla równań różniczkowych zwyczajnych

Michał Braś    bras@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Zajmujemy się problemem początkowym dla równań różniczkowych zwyczajnych postaci

$$y' = f(y) + g(y),$$

gdzie  $f(y)$  reprezentuje część niesztwną równania odpowiednią do całkowania schematem otwartym, a  $g(y)$  część sztywną, wymagającą całkowania schematem zamkniętym. Układy równań tego typu powstają w sposób naturalny podczas dyskretyzacji zmiennej przestrzennej pewnych równań różniczkowych cząstkowych. Efektywne rozwiązanie dostajemy używając otwarto-zamkniętych (IMEX) par schematów.

W referacie omówimy konstrukcję [1,2] ogólnych metod liniowych [3] typu IMEX rzędu  $p = 1, 2, 3$  i 4. Opiera się ona na wyborze  $A$ -stabilnej metody zamkniętej, na następnie optymalizacji wolnych parametrów schematu otwartego tak, aby łączny obszar absolutnej stabilności był możliwe największy. Następnie teoretyczne własności nowych metod weryfikujemy w serii eksperymentów numerycznych.

Prezentowane wyniki zostały otrzymane we współpracy z A. Cardone, G. Izzo, Z. Jackiewicz i P. Pierzchała.

### Bibliografia

- [1] M. Braś, A. Cardone, Z. Jackiewicz, and P. Pierzchała, Error propagation for implicit-explicit general linear methods, *Appl. Numer. Math.* 131: 207–231 (2018)
- [2] M. Braś, G. Izzo, and Z. Jackiewicz, Accurate implicit-explicit general linear methods with inherent Runge-Kutta stability, *J. Sci. Comput.* 50: 1105–1143 (2017)
- [3] Z. Jackiewicz, *General Linear Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley, Hoboken, New Jersey 2009.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Optimal approximation of stochastic integrals with respect to a homogeneous Poisson process

Jacek Dębowski    jacek.debowski@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

We consider numerical approximation of stochastic integrals with respect to a homogeneous Poisson process. In the first part of the talk we focus on approximation in the asymptotic setting. We assume that an integrand is a function  $f$  from  $C^r([0, T])$ . We show that the  $L^p$ -error of any approximation method, which uses  $n$  evaluations of  $f$ , cannot converge to zero faster than  $n^{-r}$ . In the second part of the talk we present the result in the worst-case setting. We discuss how the number of singularities of an integrand impacts the error. In the regular case we present an optimal algorithm which uses a nonadaptive information. In a case of a single singularity we show an adaptive algorithm that preserves the error known from the regular case.

Partially joint work with Paweł Przybyłowicz (Akademia Górniczo-Hutnicza)

### References

- [1] J. Dębowski, P. Przybyłowicz, Optimal Approximation of Stochastic integrals with Respect to a Homogeneous Poisson Process, *Mediterr. J. Math.* 13: 3713–3727 (2016).
- [2] J. Dębowski, Optimal approximation of stochastic integrals with a homogeneous Poisson process of piecewise regular functions, [in preparation].

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Block bootstrap methods for periodic processes

Anna Dudek    aedudek@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Seasonality appears naturally in economics, vibroacoustics, mechanics, hydrology and many other fields. Periodicity is often present not only in the mean but also in the covariance function. Thus, to build statistical models periodically correlated (PC) processes are used. The purpose of the talk will be to present two block bootstrap methods that can be applied for periodic time series. These are the Extension of Moving Block Bootstrap (EMBB) and the Generalized Seasonal Block Bootstrap (GSBB). The GSBB preserves the periodic structure of the data and in result the consistent estimators of time and frequency domain parameters of PC time series can be easily constructed. However, to apply the GSBB one needs to know the period length. Sometimes it may happen that period length is not known or considered signal is a composition of two components with incommensurable periods. In such a case the EMBB can be used. We discuss the consistency of the GSBB and the EMBB for parameters associated with PC time series; these are the overall mean, seasonal means, the autocovariance function and the Fourier coefficients of the mean and the autocovariance functions.

### References

- [1] A.E. Dudek, J. Leśkow, E. Paparoditis, D. Politis, *A generalized block bootstrap for seasonal time series*, J. Time Ser. Anal. 35: 89–114 (2014).
- [2] A.E. Dudek, *Block bootstrap for periodic characteristics of periodically correlated time series*, Journal of Nonparametric Statistics 30(1): 87–124 (2018).

• [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Optymalne siatki adaptacyjne dla całkowania automatycznego

Maciej Goćwin    gocwin@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Referat ten dotyczy problemu całkowania automatycznego. Celem jest dla danej funkcji  $f \in C^r$ , odcinka  $[a, b]$  i lokalnej kwadratury  $S_i$  skonstruowanie podział odcinka punktami  $(x_i)_{i=0}^m$ , tak by kwadratura złożona  $S(f) = \sum_{i=0}^{m-1} S_i(f)$  przybliżała całkę  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$  z zadaną dokładnością  $\varepsilon$ . Konstruujemy dwa adaptacyjne algorytmy konstrukcji siatki działające przy założeniu, że  $f^{(r)}(x) > 0$  dla  $x \in [a, b]$ . Konstrukcja ta oparta jest na szacowaniu  $r$ -tej pochodnej funkcji przez różnice dzielone. Pokażemy, że skonstruowana przez nas kwadratura jest optymalna, to znaczy otrzymana siatka jest minimalnej długości (a co za tym idzie, używa minimalnej ilości odwołań do funkcji) spośród wszystkich możliwych kwadratur opartych na tej samej lokalnej kwadraturze  $S_i$ . Pokażemy również jak dla suboptymalnej konstrukcji siatki można poradzić sobie z ograniczającym założeniem o dodatności  $r$ -tej pochodnej.

Przedstawimy dodatkowo wyniki testów numerycznych potwierdzających otrzymane wyniki teoretyczne.

• [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Pozytywne konsekwencje złego uwarunkowania zadania – wybrane twierdzenia teorii stabilności i odpornej stabilności wielomianów

Michał Góra    gora@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Zmienność wielu procesów może być modelowana za pomocą równań różniczkowych lub schematów różnicowych. Wśród nich ważną rolę, nie tylko ze względów historycznych, odgrywają

- liniowe równania różniczkowe zwyczajne rzędu  $n \in \mathbb{N}$

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t)$$

- liniowe schematy różnicowe rzędu  $n \in \mathbb{N}$

$$x(k+n) + a_{n-1}x(k+n-1) + \dots + a_1x(k+1) + a_0x(k) = f(k)$$

czy intensywnie badane w ciągu ostatnich kilku lat

- liniowe równania różniczkowe zwyczajne niecałkowitego rzędu

$$x^{(\alpha_n)}(t) + a_{n-1}x^{(\alpha_{n-1})} + \dots + a_1x^{(\alpha_1)}(t) + a_0x^{(\alpha_0)}(t) = f(t).$$

Szczególnie istotną własnością rozwiązań tych równań jest ich stabilność determinowana przez lokalizację pierwiastków wielomianów charakterystycznych stowarzyszonych z nimi. Ponieważ współczynniki równań modelowych na ogół znane są jedynie z pewną dokładnością, dlatego badając stabilność rozwiązań ryzykowne może okazać się ograniczenie się do badania lokalizacji zer jednego, często przypadkowo uzyskanego wielomianu charakterystycznego. Należałoby raczej badać lokalizację zer całych rodzin takich wielomianów, uwzględniając przy ich konstrukcji faktyczne zakresy zmienności parametrów. To prowadzi do problemu tzw. *odpornej stabilności*.

W pierwszej części referatu przypomniane zostaną wybrane twierdzenia teorii (odpornej) stabilności: Charitonowa, krawędziowe oraz Garloff–Wagnera o stabilności iloczynu Hadamarda wielomianów. W drugiej części przedstawione zostaną najważniejsze uogólnienia tych wyników uzyskane przez autora, częściowo we współpracy z prof. S. Białasem.

## Bibliografia

- [1] S. Białas, M. Góra, The generalized Hadamard product of polynomials and its stability, przyjęte do publikacji w *Linear and Multilinear Algebra*
- [2] S. Białas, M. Góra, Some properties of zeros of polynomials with vanishing coefficients, *Linear Algebra Appl.* 430: 1976–1991 (2009)
- [3] M. Góra, *Geometria zer domkniętych rodzin wielomianów*, rozprawa doktorska, WMS Akademia Górniczo-Hutnicza (2009)
- [4] S. Białas, M. Góra, A few results concerning the Hurwitz stability of polytopes of complex polynomials, *Linear Algebra Appl.* 436: 1177–1188 (2012)

• [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Skończenie wymiarowe rozwiązywanie problemów początkowych w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha

Bolesław Kacewicz    kacewicz@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Paweł Przybyłowicz    pprzybyl@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Współautor:

Paweł Przybyłowicz    pprzybyl@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Zajmujemy się przybliżonym rozwiązywaniem problemów początkowych określonych w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha z bazą Schaudera. Dopuszczamy jedynie algorytmy działające w skończenie wymiarowych przestrzeniach  $\mathbb{R}^N$ . Definiujemy algorytm oparty na (niekoniecznie jednostajnym) podziale przedziału całkowania na  $n$  podprzedziałów, gdzie wymiar  $N$  może zmieniać się w poszczególnych podprzedziałach. Znajdujemy oszacowania górne na błąd i koszt tego algorytmu dla regularnych funkcji prawej strony, w zależności od parametru dyskretyzacji  $n$  i zmiennych parametrów obciążenia  $N$ . Przy równych parametrach obciążenia w każdym podprzedziale, otrzymane oszacowania są ostre (z dokładnością do stałej), co wynika z uzyskanych oszacowań dolnych na błąd dowolnego algorytmu. Dla  $\varepsilon > 0$  dyskutujemy oszacowania górne i dolne na  $\varepsilon$ -złożoność problemu, czyli na minimalny koszt przybliżenia rozwiązania z dokładnością  $\varepsilon$ .

## Bibliografia

- [1] B. Kacewicz and P. Przybyłowicz, The optimal finite-dimensional solution of initial value problems in infinite-dimensional Banach spaces, *J. Math. Analysis Appl.* 471: 322–341 (2019).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Optimal approximation of stochastic Itô integrals in the presence of informational noise

Andrzej Kałuża    akaluz@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Co-authors:

Paweł Morkisz    morkiszp@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

aweł Przybyłowicz    pprzybyl@agh.edu.pl  
Akademia Górniczo-Hutnicza

We present results on efficient approximation of stochastic integrals of the following form

$$\int_0^T X(t) dW(t) \quad (1)$$

where  $T > 0$ ,  $W = \{W(t)\}_{t \geq 0}$  is a standard Wiener process,  $X = \{X(t)\}_{t \in [0, T]}$  is a processes belonging to a class of progressively measurable stochastic processes that are Hölder continuous in the  $r$ -th mean. Inspired by increasing popularity of computations with low precision (used on Graphics Processing Units – GPUs), we introduce a suitable analytic noise model of standard noisy information about  $X$  and  $W$ . In this model we show that the upper bounds on the error of the Riemann-Maruyama quadrature are proportional to  $n^{-\varrho} + \delta_1 + \delta_2$ , where  $n$  is a number of noisy evaluations of  $X$  and  $W$ ,  $\varrho \in (0, 1]$  is a Hölder exponent of  $X$ , and  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$  are precision parameters for values of  $X$  and  $W$ , respectively. We also discuss some corresponding lower error bounds. Finally, we report numerical experiments that confirm our theoretical findings.

This is a joint work with P. M. Morkisz and P. Przybyłowicz.

### References

- [1] A. Kałuża, P. M. Morkisz, P. Przybyłowicz, Optimal approximation of stochastic integrals in analytic noise model, *Appl. Math. Comp.*, 356: 74–91, (2019).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Prolate spheroidals and their selected applications

Marek Aleksander Kowalski    kowalski@uksw.edu.pl  
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego

Prolate spheroidal wave functions  $\phi_k$  are eigenfunctions of the integral operator

$$L_2(-\tau, \tau) \ni f \mapsto \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin(a(\cdot - s))}{\pi(\cdot - s)} f(s) ds,$$

whose eigenvalues  $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$  arranged into a decreasing sequence convergent to zero. Here  $a$  and  $\tau$  are given positive numbers. The functions in the eigenpairs  $(\lambda_k, \phi_k)$  are orthogonal in  $L_2(-\tau, \tau)$  and uniquely determined by the condition

$$\forall_k \quad \phi_k(\tau) > 0 \wedge \int_{-\tau}^{\tau} |\phi_k(t)|^2 dt = 1.$$

Moreover, their extensions to the complex plane belong to the Paley-Wiener class of entire functions  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad \exists K > 0 \forall z \in \mathbb{C} |f(z)| \leq K e^{a|z|},$$

see [1, 2, 3].

The prolate spheroidals are important in mathematics and have many interesting applications in physics and technical sciences, especially in signal processing. However, they are not so easy to determine numerically. Most computational method aim to find  $\phi_j(x)$  for given values of  $j \leq m$  and  $x \in [-\tau, \tau]$ . They are usually based on truncating infinite expansions

$$\phi_j = \sum_{k=0}^{\infty} d_{j,k} F_k,$$

where  $F_k$  are some functions orthonormal either on  $[-\tau, \tau]$  or  $\mathbb{R}$ , see [4, 5]. However, the computed representations  $\left\{ \sum_{k=0}^{n_j} d_{j,k} F_k \right\}_{j=1}^m$  are usually far from being numerically orthonormal on  $[-\tau, \tau]$ . In this talk we'll show how to overcome this obstacle. We'll also show some applications in approximation theory and bandlimited multichannel transmission.

## References

- [1] M.A. Kowalski, *Aproksymacja, informacja. algorytm*, Wydawnictwo Naukowe UKSW, Warszawa 2019.
- [2] M.A. Kowalski, K. Sikorski and F. Stenger, *Selected Topics in Approximation and Computation*, Oxford University Press, Oxford, UK 1995.
- [3] I.C. Moore and M. Cada, Prolate spheroidal wave functions, an introduction to the Slepian series and its properties, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 16: 208-230 (2004).
- [4] J.W. Thompson, *Atlas for Computing Mathematical Functions: An Illustrated Guide for Practitioners with Programs in C and Mathematica*, Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc. 307-344, 1997.
- [5] G. Walter and T. Soleski, A new friendly method of computing prolate spheroidal wave functions and wavelets, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 19: 432-443 (2005).

[● Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Operatory ściskające dla nieciągłej metody Galerkinia z różnymi typami penalizacji

Piotr Krzyżanowski    [p.krzyzanowski@mimuw.edu.pl](mailto:p.krzyzanowski@mimuw.edu.pl)  
 Uniwersytet Warszawski

Dyskretyzacja zadania dyfuzji z nieciągłym współczynnikiem metodą elementu skończonego prowadzi do źle uwarunkowanego układu równań, m.in. ze względu na parametry dyskretyzacji, jak i na kontrast współczynnika. Przedstawimy kilka konstrukcji operatora ściskającego oraz oszacowania wynikowego wskaźnika uwarunkowania, dla dyskretyzacji nieciągłą metodą Galerkinia różniących się rodzajem użytej penalizacji, uwzględniającej różne warunki transmisji.

Część wyników uzyskano we współpracy z Maksymilianem Dryją [2] i Marcusem Sarkisem [1].

## Bibliografia

- [1] P. Krzyżanowski, M.Sarkis, *Nonoverlapping Additive Schwarz Method for hp-DGFEM with Higher-Order Penalty Terms*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXV. Lecture Notes in Computer Science and Engineering. (to appear)
- [2] M. Dryja, P. Krzyżanowski, *A Massively Parallel Nonoverlapping Additive Schwarz Method for Discontinuous Galerkin Discretization of Elliptic Problems*, Num. Math. 132 (2). Springer Berlin Heidelberg: 347 - 67 (2015).

[● Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)



## An Adaptive Coarse Space for DG discretization of a heterogeneous elliptic problem

Leszek Marcinkowski    L.Marcinkowski@mimuw.edu.pl  
 Uniwersytet Warszawski

Co-authors:

Erik Eikeland    Erik.Eikeland@hib.no  
 Western University of Applied Science, Bergen, Norway

Talal Rahman    Talal.Rahman@hib.no  
 Western University of Applied Science, Bergen, Norway

In this talk, we present an overlapping additive Schwarz method for a Discontinuous Galerkin Interior Penalty discretization of second order elliptic problem in two dimensions, with highly varying coefficients. We propose variants of the adaptively built multiscale coarse space each containing local spaces spanned by functions constructed through solving specially defined eigenvalue problems over the 2D structures related to the interfaces between subdomains. The methods are easy to construct, inherently parallel, and overall effective. We present a theoretical bound for the condition number of the system, showing it is independent of the contrast in the coefficients when enough local eigenfunctions are added to the coarse space.

### References

- [1] B. Rivière, *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations*, Frontiers in Applied Mathematics, 35, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, theory and implementation, 2008.
- [2] B.F. Smith, P.E. Bjørstad, W.D. Gropp, *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] N. Spillane, V. Dolean, P. Hauret, F. Nataf, C. Pechstein, R. Scheichl, Abstract robust coarse spaces for systems of PDEs via generalized eigenproblems in the overlaps. *Numer. Math.* 126:741–770 (2014).
- [4] A. Toselli, O. Widlund, *Domain decomposition methods—algorithms and theory*, Springer Series in Computational Mathematics, 34, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Derivative-free randomized Milstein scheme for strong approximation of solutions of SDEs in analytic noise model

Paweł Morkisz    morkiszp@agh.edu.pl  
 Akademia Górniczo-Hutnicza

Co-author:

Paweł Przybyłowicz    pprzybyl@agh.edu.pl  
 Akademia Górniczo-Hutnicza

We consider approximate solving of the following scalar SDE

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), & t \in [0, T], \\ X(0) = \eta, \end{cases} \quad (2)$$

driven by a standard one-dimensional Wiener process  $W = (W(t))_{t \in [0, T]}$ .

Inspired by increasing popularity of computations with low precision (used on Graphics Processing Units - GPUs and standard Computer Processing Units - CPUs), we introduce a suitable analytic noise model of standard noisy information about  $a$  and  $b$ . In this model we show that the upper bounds on the error of the derivative-free randomized Milstein scheme is proportional to  $n^{-\min\{\frac{1}{2} + \gamma_1, \gamma_2\}} + \delta_1 + \delta_2$ , where  $n$  is a number of noisy evaluations of  $a$  and  $b$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1]$  are Hölder exponents of  $a = a(t, y), b = b(t, y)$  wrt to the time variable  $t$ , and  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$  are precision parameters for values of  $a$  and  $b$ , respectively. We also discuss corresponding lower bounds. Finally, we report numerical

experiments performed on both CPU and GPU that confirm our theoretical findings. We also present some computational performance comparison between those two architectures.

This is a joint work with Paweł Przybyłowicz (Akademia Górniczo-Hutnicza UST)

## References

- [1] R. Kruse, and Y. Wu, *A randomized Milstein method for stochastic differential equations with non-differentiable drift coefficients*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, Volume 22, 2017, doi: 10.3934/dcdsb.2018253.
- [2] P. M. Morkisz, P. Przybyłowicz, *Optimal pointwise approximation of SDE's from inexact information*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 324, 2017, 85–100.
- [3] A. Kату́за, P. M. Morkisz, and P. Przybyłowicz, *Optimal approximation of stochastic integrals in analytic noise model*, Applied Mathematics and Computation, Volume 356, 2019, 74–91.

[● Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Algorytmiczne obliczanie odwzorowania indukowanego w homologiach

Paweł Pilarczyk    pawel.pilarczyk@pg.edu.pl  
Politechnika Gdańska

Przedstawię algorytmiczną metodę obliczania homomorfizmu indukowanego w homologiach przez odwzorowanie ciągłe. Metoda ta bazuje na rzutowaniach z wykresu funkcji lub jej przybliżenia na dziedzinę i przeciwdziedzinę. Zamiast tradycyjnych kompleksów symplecjonalnych stosuje się w tym podejściu zbiory kostkowe, które naturalnie wpasowują się w strukturę iloczynu kartezjańskiego. Metoda ta była po raz pierwszy wprowadzona w pracy [1] i jest nadal rozwijana; zob. [2]. Bazujące na niej oprogramowanie w C++ było stosowane z sukcesem do obliczania indeksu Conleya w układach dynamicznych pochodzących z modelowania populacji oraz z zagadnień w fizyce teoretycznej i w epidemiologii; zob. np. [3].

## Bibliografia

- [1] K. Mischaikow, M. Mrozek, P. Pilarczyk, *Graph approach to the computation of the homology of continuous maps*, Found. Comput. Math. 5: 199–229 (2005).
- [2] S. Harker, H. Kokubu, K. Mischaikow, P. Pilarczyk, *Inducing a map on homology from a correspondence*, Proc. Amer. Math. Soc. 144: 1787–1801 (2016).
- [3] D.H. Knipl, P. Pilarczyk, G. Rost, *Rich bifurcation structure in a two-patch vaccination model*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 14: 980–1017 (2015).

[● Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## W poszukiwaniu wszystkich zer funkcji gładkich

Leszek Plaskota    leszekp@mimuw.edu.pl  
Uniwersytet Warszawski

Rozpatrujemy problem znalezienia *wszystkich* rozwiązań równania

$$f(x) = 0$$

dla funkcji  $f \in C^r(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^d$ , na podstawie wartości funkcji  $f$  w  $n$  punktach dziedziny, przy czym błąd pomiędzy rzeczywistym zbiorem rozwiązań  $Z(f)$  a jego aproksymacją  $Z_n(f)$  mierzy się przy pomocy metryki Hausdorffa  $d_H(Z(f), Z_n(f))$ . Pokazujemy, że o ile błąd aproksymacji w przypadku najgorszym dla każdego  $n$  wynosi  $+\infty$ , to istnieje algorytm zbiegający do rozwiązania dla każdej funkcji  $f$ . Jednak zbieżność może być dowolnie wolna. Dokładniej, dla dowolnego ciągu aproksymacji  $\{Z_n\}_{n \geq 1}$  używających  $n$  adaptacyjnie wybranych wartości funkcji i dla dowolnego dodatniego ciągu  $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$  zbiegającego do zera istnieją funkcje  $f \in C^r(D)$  takie, że

$$\sup_{n \geq 1} \tau_n^{-1} d_H(Z(f), Z_n(f)) = +\infty.$$

[● Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Phaseless polynomial interpolation

Michał R. Przybytek    mrp@mimuw.edu.pl  
 Uniwersytet Warszawski

In this talk I will revisit the classical problem of polynomial interpolation, with a slight twist; namely, polynomial evaluations are available up to a group action of the unit circle on the complex plane. It turns out that this new setting allows for a phaseless recovery of a polynomial in a polynomial time. This is a joint work with Paweł Siedlecki.

### References

- [1] A. Conca, D. Edidin, M. Hering, C. Vinzant; *An algebraic characterization of injectivity in phase retrieval*; Applied and Computational Harmonic Analysis 38(2) (2015) 346–356.
- [2] S. Mallat, I. Waldspurger; *Phase retrieval for the Cauchy wavelet transform*; Journal of Fourier Analysis and Applications 21(6) (2014)
- [3] L. Plaskota; *Noisy information and computational complexity*; Cambridge University Press (1996).
- [4] L. Plaskota, P. Siedlecki, H. Woźniakowski; *Absolute value information*; Journal of Complexity, submitted (2019)
- [5] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski; *Information-based complexity*; Academic Press Professional, Inc. San Diego, CA, USA (1988).

[● Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Optimal approximation of SDEs under fractional Sobolev regularity

Paweł Przybyłowicz    pprzybyl@agh.edu.pl  
 Akademia Górniczo-Hutnicza

We investigate the problem of strong approximation of solution of the following scalar SDE

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t)dW(t), & t \in [0, T], \\ X(0) = \eta, \end{cases} \quad (3)$$

driven by a standard one-dimensional Wiener process  $W = (W(t))_{t \in [0, T]}$ . We assume that  $a = a(t, y)$  and  $b = b(t)$  are only measurable with respect to the time variable  $t$ , and  $a$  is globally Lipschitz with respect to the space variable  $y$ .

We investigate behavior of the randomized Euler scheme  $X_n^{RE}$ , which evaluates  $a$  and  $b$  at randomly chosen points. By using Information-Based Complexity framework we show that randomized Euler scheme converges to the solution  $X$  of the underlying SDE but the convergence of  $X_n^{RE}$  to  $X$  may be arbitrarily slow. ([5]). In order to get positive results we assume that  $b$  belongs to the Sobolev-Slobodeckij space  $W^{\sigma, p}$ ,  $\sigma \in (0, 1)$ ,  $p > 2$ . In this case we show that the  $L^2(\Omega)$ -error of the algorithm  $X_n^{RE}$  is  $O(n^{-\min\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \sigma\}})$ . Moreover, we investigate corresponding lower bounds ([3]). In particular, this extends the results from [1], [2], [4], and [6], obtained for the randomized Euler scheme.

This is a joint work with Raphael Kruse (TU Berlin, Germany, kruse@math.tu-berlin.de)

### References

- [1] S. Heinrich, and B. Milla, The randomized complexity of initial value problems, *J. Complexity*, 24: 77–88 (2008).
- [2] A. Jentzen, and A. Neuenkirch, A random Euler scheme for Carathéodory differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 224: 346–359 (2009).
- [3] R. Kruse, and P. Przybyłowicz, Approximation of solutions of SDEs with fractional Sobolev regularity, in preparation
- [4] R. Kruse, and Y. Wu, Error analysis of randomized Runge - Kutta methods for differential equations with time-irregular coefficients, *Comput. Methods Appl. Math.*, 17: 479–498 (2017).
- [5] P. Przybyłowicz, On arbitrary slow rate of convergence for randomized Euler scheme, in preparation

- [6] P. Przybyłowicz, and P. Morkisz, Strong approximation of solutions of stochastic differential equations with time-irregular coefficients via randomized Euler algorithm, *Appl. Numer. Math.*, **78**: 80–94 (2014).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Absolute value information for IBC problems

Paweł Siedlecki    [psiedlecki@mimuw.edu.pl](mailto:psiedlecki@mimuw.edu.pl)  
 Uniwersytet Warszawski

Two classes of information have been mainly considered in Information-Based Complexity (IBC) for approximate solutions of continuous problems. The first class is  $\Lambda^{\text{all}}$  and consists of all linear functionals, whereas the second class is  $\Lambda^{\text{std}}$  and consists of only function evaluations. A different class of information has been studied in the context of phase retrieval, where it is assumed that only absolute values of linear functionals from  $\Lambda \subseteq \Lambda^{\text{all}}$  are available. We denote this class  $|\Lambda|$  and call it the absolute value information class. Hence we have  $|\Lambda^{\text{all}}|$  when we can compute the absolute values of arbitrary linear functionals, and  $\Lambda^{\text{std}}$  when only the absolute values of function evaluations can be computed. For  $|\Lambda|$  we need to modify the algorithm error to compensate the missing phase in information values.

We establish the powers of  $|\Lambda^{\text{all}}|$  and  $|\Lambda^{\text{std}}|$  in comparison to  $\Lambda^{\text{all}}$  and  $\Lambda^{\text{std}}$  for various IBC problems in the worst case setting. Our main result is that  $|\Lambda^{\text{all}}|$  is roughly of the same power as  $\Lambda^{\text{all}}$  for linear IBC problems. In fact, for the complex case this holds for all subclasses  $\Lambda$  of  $\Lambda^{\text{all}}$  with the property that  $L_1, L_2 \in \Lambda$  implies that  $L_1 + L_2$  and  $L_1 + iL_2$ , with  $i = \sqrt{-1}$ , are also in  $\Lambda$ . In general, this property does *not* hold for  $|\Lambda^{\text{std}}|$ . We prove that  $|\Lambda^{\text{std}}|$  is usually too weak to solve linear problems.

This is a joint work with L. Plaskota and H. Woźniakowski.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Period $k$ -tupling bifurcations of periodic orbits with time reversing symmetry

Irmina Walawska    [irmina.walawska@gmail.com](mailto:irmina.walawska@gmail.com)  
 Uniwersytet Jagielloński

Let  $f : M \rightarrow X$  be  $\mathcal{C}^3$ -smooth function, defined on an open set  $M \subset \mathbb{R} \times X$ , where  $X$  is a smooth manifold. With additional assumption, that  $f$  satisfy constraint  $\mathcal{C}: X \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ , it is possible to restrict analysis of bifurcation to a set of fixed points of the map  $f$ . As an example we consider Poincaré map in a system with time reversing system, ie. for Circular Restricted Three Body Problem analysis of period  $k$ -tupling bifurcation of halo orbits will be conducted. For strong resonant values of eigenvalues of Jacobian matrix of a Poincaré map period doubling, tripling and quadrupling bifurcations of halo orbits are observed.

### References

- [1] I. Walawska, D. Wilczak, *Validated numerics for period-tupling and touch-and-go bifurcations of symmetric periodic orbits in reversible systems*, COMMUN NONLINEAR SCI vol. 74C (2019), 30-54

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

## Validated integration of a class of dissipative PDEs

Daniel Wilczak    [wilczak@ii.uj.edu.pl](mailto:wilczak@ii.uj.edu.pl)  
 Uniwersytet Jagielloński

We propose a new algorithm, which computes validated bounds on the trajectories generated by an infinite-dimensional dissipative ODE. It consists of the two major ingredients.

- A new algorithm for automatic differentiation in infinite dimension is proposed. This allows us to compute truncated Taylor series of the solutions with respect to time variable for finite number of leading variables.

- The dynamic on infinite number of variables is bounded uniformly by an infinite sequence of differential inequalities.

As an application of the proposed algorithm we give a computer-assisted proof of the existence of chaos in the Kuramoto–Sivashinsky PDE on a line with periodic and odd boundary conditions. We have shown that certain Poincaré map admits an invariant set on which the dynamics is semiconjugated to a subshift of finite type with positive topological entropy. To the best of our knowledge, this is the first existing results of this type.

This is joint work with Piotr Zgliczyński [1].

#### References

- [1] D. Wilczak and P. Zgliczyński, *A geometric method for infinite-dimensional chaos: symbolic dynamics for the Kuramoto–Sivashinsky PDE on the line*, submitted to Journal of Differential Equations.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

### Spolegliwość wielowymiarowego zadania Voltery

Henryk Woźniakowski    [wozniak@mimuw.edu.pl](mailto:wozniak@mimuw.edu.pl)  
Uniwersytet Warszawski

Pokazujemy, że spolegliwość (tractability) rozwiązywanego zadania jest równoważna spolegliwości wielowymiarowego zadania aproksymacji. Zachodzi to w przypadku najgorszym dla różnych klas funkcyjnych. Wspólna praca z A. G. Werschulz'em.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

### Komputerowo wspierane dowody w dynamice

Piotr Zgliczyński    [umzglicz@cyf-kr.edu.pl](mailto:umzglicz@cyf-kr.edu.pl)  
Uniwersytet Jagielloński

Omówię podstawowe techniki stosowane w komputerowo wspieranych dowodach w dynamice.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)