100 lat PTM

metody probabilistyczne i stochastyczne

patron sesji: Hugo Steinhaus

rok zał. 1919

ptm

Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich

w stulecie
Polskiego Towarzystwa Matematycznego

Kraków 3 -7 września 2019

Spis treści

Metody probabilistyczne i stochastyczne 7

8 Anna Aksamit

Optymalny transport martyngałowy oraz dualność wyceny i replikacji

10 Małgorzata Bogdan

Sorted L-One Penalized Estimation

12 Zdzisław Brzeźniak

Stochastic nonlinear Schrödinger equation on 3d compact manifolds

14 Dariusz Buraczewski

O równaniach kinetycznych i gałązkowych spacerach losowych

15 Krzysztof Burdzy
On Archimedes' principle and Fermi acceleration

16 Krzysztof Burnecki, Mario Giuricich, Zbigniew Palmowski
Wycena warunkowo zamiennych obligacji katastroficznych

17 Leszek Gawarecki, Sergio Albeverio, Vidhar Mandrekar, B. Rüdiger, B. Sarkar
Itô formula for mild solutions to stochastic differential equations driven by Gaussian and non-Gaussian noise

19 Adam Jakubowski
Współczesne pożytki z zasady warunkowania

21 Jacek Jakubowski
Zależności strukturalne procesów wielowymiarowych

23 Zbigniew J. Jurek
Kazimierz Urbanik w probabilistyce

35 Bogumił Kamiński, Paweł Prałat
Sub-trees of a random tree

36 Tomasz J. Kozubowski, Krzysztof Podgórski
The Sibuya distribution and stochastic extrema

37 Tadeusz Kulczycki, Michał Ryznar, Paweł Sztonyk
Własności półgrup dla rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych z szumem Lévy'ego

39 Mateusz Kwaśnicki
Norma ℓ^p dyskretnej transformaty Hilberta

41 Marcin Magdziarz
Lamperti transformation – Cure for ergodicity breaking

42 Elżbieta Motyl
Stochastyczne równanie quasi-geostroficzne

44 Jacek Osiewalski
Bayesian interpretation of some Empirical Bayes procedures in hierarchical models

46 Zbigniew Palmowski, A. Bhattacharya, B. Zwart
Niezwykła uporczywość średniej próbkowej w zbiorze zwartym czyli o nieskończonej liczbie ciężkoogonowych skoków

47 Anna Panorska, Tomasz Kozubowski, Marek Arendarczyk, Fares Qeadan

Stochastic Episodes with Light and Heavy Tails: Models, Properties, and Testing

48 Adam Paszkiewicz

Problem Amemiya–Ando, produkty kontrakcji, produkty warunkowych wartości oczekiwanych, inne wyniki geometrycznej teorii operatorów

49 Piotr Puchała, Andrzej Z. Grzybowski

On a certain characterization of Young measures associated with bounded Borel functions

51 Tomasz Rolski

Początki procesów punktowych i wkład Czesława Ryll-Nardzewskiego do teorii

52 Andrzej Rozkosz, Tomasz Klimsiak

Asymptotyka rozwiązań półliniowych równań ewolucyjnych

53 Andrzej Ruciński

Embedding Erdős–Rényi Random Graphs into Random Regular Graphs

54 Ryszard Rudnicki

Asymptotyka rozkładów procesów kawałkami deterministycznych

56 Grzegorz Serafin

Liczba izomorficznych kopii danego grafu w grafie losowym

58 Łukasz Stettner

Problemy sterowania procesem Markowa ze zdegenerowaną obserwacją

60 Władysław Szczotka

Steinhausowskie seminarium matematyki stosowanej

61 Anna Talarczyk-Noble

Twierdzenia graniczne dla pewnej klasy wycałkowanych procesów nieskończenie podzielnych

63 Karol Wawrzyniak

W służbie społeczeństwu, czyli modelowanie matematyczne w praktyce

64 Aleksander Weron

Hugo Steinhaus – matematyk na każdy sezon

65 Rafał M. Wojakowski

Mathematics in Finance: On option valuation and its applications to solving certain real-world problems in a probabilistic framework

67 Aneta Augustynowicz

Prawie pewne własności centralnych statystyk porządkowych

69 Paweł Kurasiński

Dokładne prawa wielkich liczb i ich zastosowania

71 Rafał Martynek

Kanoniczne procesy Bernoulliego

73 Agnieszka Piliszek

Warunki niezależności i stałości momentów, które charakteryzują rozkład Gamma/Wisharta i rozkład Kummera

Optymalny transport martyngałowy oraz dualność wyceny i replikacji

Anna Aksamit
anna.aksamit@sydney.edu.au
The University of Sydney, Australia

W pierwszej części referatu omówię problem optymalnego transportu martyngałowego, [2]. Transport po martyngałach i jego dualne sformułowanie mają naturalną interpretację w odpornościowym podejściu w matematyce finansowej. Za ich pomocą można wyrazić przedziały cen i kosztów replikacji, które są zgodne z dostępną informacją.

W drugiej części referatu przedstawię problem i wyniki dotyczące optymalnego stopowania w podejściu odpornościowym, [1]. Głównymi użytymi narzędziami są odpowiednie zmiany przestrzeni probabilistycznej. Dzięki nim możemy zastosować programowanie dynamiczne do znalezienia optymalnego momentu zatrzymania i pokazać dualność.

Bibliografia

[1] A. Aksamit, S. Deng, J. Obłój, and X. Tan,*The robust pricing–hedging duality for American options in discrete time financial markets*, Mathematical Finance, **29(3)**: 861–897 (2019).

[2] M. Beiglböck, P. Henry-Labordère, and F. Penkner, *Model-independent bounds for option prices—a mass transport approach*, *Finance and Stochastics*, **17(3)**:

477–501 (2013).
Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Sorted L-One Penalized Estimation

Małgorzata Bogdan
Malgorzata.Bogdan@pwr.wroc.pl
University of Wrocław

Sorted L-One Penalized Estimation (SLOPE) is a relatively new convex optimization method for identifying predictors in large data bases. Sorted L-One (ℓ^1) Penalty reduces the dimension by shrinking small regression coefficients to zero and making equal those that differ little. It allows for FDR control under orthogonal designs and yields asymptotically minimax estimators in sparse high-dimensional regression. We will discuss the ideas behind the method and present new theoretical results concerning asymptotic FDR control and grouping properties of SLOPE. Theoretical results will be illustrated with computer simulations and real data analysis in the context of the analysis of genetic and financial data.

References

[1] D. Brzyski and A. Gossmann and W. Su and M. Bogdan, *Group SLOPE–adaptive selection of groups of predictors*, J. Amer. Statist. Assoc. **114**, no. 525, 419–433 (2019).

[2] W. Su and M. Bogdan and E. Candès, *False discoveries occur early on the Lasso path*, Ann. Statist. **45** no. 5, 2133–2150 (2017).

[3] M. Bogdan and E. van den Berg and C. Sabatti and W. Su and E. Candès, *SLOPE–adaptive variable selection*

via convex optimization, Ann. Appl. Stat. **9** no. 3, 1103–1140 (2015).

[4] M. Bogdan and A. Chakrabarti and F. Frommlet and J. Ghosh, *Asymptotic Bayes-optimality under sparsity of some multiple testing procedures*, Ann. Statist. **39** no. 3, 1551–1579 (2011).

[5] M. Bogdan and J. Ghosh and S. Tokdar, *A comparison of the Benjamini-Hochberg procedure with some Bayesian rules for multiple testing, Beyond parametrics in interdisciplinary research: Festschrift in honor of Professor Pranab K. Sen*, Inst. Math. Stat. (IMS) Collect., 1, 2008, 211–230.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Stochastic nonlinear Schrödinger equation on 3d compact manifolds

Zdzisław Brzeźniak

zdzislaw.brzezniak@york.ac.uk

The University of York, Wielka Brytania

I will speak about two recent works with Fabian Hornung and Lutz Weis (Karlsruhe). In particular, about the existence of a global solution to the stochastic nonlinear Schrödinger equation (SNSL) on a 3-dimensional manifold with multiplicative Gaussian and jump type noises. I will also speak about the uniqueness for such equations in case of Gaussian bilinear noise the proof of which is based on novel Strichartz estimates and Littlewood-Paley decomposition in time. I will conclude by mentioning the Large Deviations Principle for SNSL.

References

[1] Z. Brzeźniak, F. Hornung and L. Weis, *Martingale solutions for the stochastic nonlinear Schrödinger equation in the energy space*, Probab. Theory Relat. Fields **174**, 1273–1338 (2019)

[2] Z. Brzeźniak, F. Hornung and L. Weis, *Uniqueness of martingale solutions for the stochastic nonlinear Schrödinger equation on 3d compact manifolds,* arXiv:1808.10619

[3] Z. Brzeźniak, F. Hornung and U. Manna, *Weak martingale solutions for the stochastic nonlinear Schrödinger equation driven by pure jump noise*, Stoch PDE: Anal

Comp (2019)

[4] Z. Brzeźniak and A. Millet, *On the stochastic Strichartz estimates and the stochastic nonlinear Schrödinger equation on a compact riemannian manifold*, Potential Analysis, **41**, 2, 269–315 (2014)

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

O równaniach kinetycznych i gałązkowych spacerach losowych

Dariusz Buraczewski

dariusz.buraczewski@uwr.edu.pl

Uniwersytet Wrocławski

Podczas referatu zostanie omówiona pewna klasa równań kinetycznych postaci $\partial_t \mu_t + \mu_t = Q\mu_t$. Rozwiązanie oraz jego własności asymptotyczne mogą zostać przedstawione przy pomocy drzew losowych oraz powiązanym gałązkowym spacerze losowym. Główny wynik pochodzi z pracy [2].

Bibliografia

[1] F. Bassetti, L. Ladelli, *Self-similar solutions in one-dimensional kinetic models: A probabilistic view.* Ann. Appl. Probab., 22(5), 1928–1961, (2012)

[2] K. Bogus, D. Buraczewski, A. Marynych, *Self-similar solutions of kinetic-type equations: the critical case*, przyjęte do *Stochastic Processes and their Applications.*

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

On Archimedes' principle and Fermi acceleration

Krzysztof Burdzy
burdzy@uw.edu
University of Washington, USA

Archimedes' principle is over 2,000 years old but there is no mathematical literature on this law of physics. The most likely reason is that Archimedes' principle follows easily from the formulas for pressure. This approach leads to some subtle questions. I will describe an approach to Archimedes' principle using classical mechanics, mixed with some stochastic ideas.

"Fermi acceleration" refers to the unlimited growth of energy in models for particles reflecting from moving walls. I will discuss the question of the emergence of Fermi acceleration in rotating drums with hard balls under gravitation. Without gravitation, no Fermi acceleration arises in a rotating drum because the system is integrable.

Both topics are related to Lambertian reflections, also known as the Knudsen law, modeling random reflections of light or gas particles from rough surfaces.

Joint work with M. Duarte, C.-E. Gauthier, R. Graham, J. Małecki and J. San Martin.

• Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Wycena warunkowo zamiennych obligacji katastroficznych

Krzysztof Burnecki

krzysztof.burnecki@pwr.edu.pl

Centrum Steinhausa i Politechnika Wrocławska

Przedstawiamy konstrukcję nowego rodzaju instrumentu finansowego związanego z ryzykiem ubezpieczeniowym zwanego warunkowo zamienną obligacją katastroficzną (ang. contingent convertible catastrophe bond – CocoCat) oraz jego zalety w porównaniu do klasycznych obligacji katastroficznych (ang. CAT bonds) oraz kapitałowych opcji katastroficznych (ang. catastrophe-equity puts). Wyceniamy nowy instrument przy założeniu, że proces liczący szkody jest niejednorodnych procesem Poissona a proces stopy procentowej opisany jest modelem Longstaffa. Używając wykładniczej zamiany miary otrzymujemy analityczne wzory. Ilustrujemy otrzymane wyniki korzystając z parametrów dopasowanych do rzeczywistych danych z poprzednich naszych prac. Analiza wyników pokazuje, że ceny instrumentu są najbardziej wrażliwe na zmiany stopy procentowej, współczynników konwersji i progu zagregowanych szkód.

Bibliografia

[1] K. Burnecki, M. Giuricich, Z. Palmowski, *Valuation of contingent convertible catastrophe bonds – the case for equity conversion*, submitted to Insurance: Mathematics & Economics, arXiv:1804.07997v1.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Itô formula for mild solutions to stochastic differential equations driven by Gaussian and non-Gaussian noise

Leszek Gawarecki

lgawarec@kettering.edu

Kettering University,USA

Co-authors:

Sergio Albeverio

albeverio@uni-bonn.de

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Niemcy

Viadhar Mandrekar

mandrekar@stt.msu.edu

Michigan State University, USA

B. Rüdiger

ruediger@uni-wuppertal.de

Bergische Universität Wuppertal, Germany

B. Sarkar

barunsarkar.math@gmail.com

Bergische Universität Wuppertal, Germany

We use the Yosida approximation to find an Itô formula for mild solutions to stochastic differential equations driven by Gaussian and non-Gaussian noise (compensated Poisson random measure associated to a L'evy process). We consider the functions $\Psi \in C^{1,2}([0,T] \times H)$, where $\Psi : [0,T] \times H \to \mathbb{R}$ and H is a real separable Hilbert space. Using this Itô formula we prove exponential stability and ultimate bounded-

ness properties, in the mean square sense, for mild solutions. Through some examples, we compare this Itô formula to Ichikawa's Itô formula for mild solutions [1]. We also present an extension to the non-Gaussian case of the semigroup version of the Itô formula obtained in DaPrato *et. al.* [2].

References

[1] A. Ichikawa, *Semilinear stochastic evolution equations: boundedness, stability and invariant measures*, Stochastics **12**: 1–39 (1984).

[2] G. Da Prato, A. Jentzen, M. Röckner, *A mild Itô formula for SPDEs*, arXiv:1009.3526v3, (July 25, 2012).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Współczesne pożytki z zasady warunkowania

Adam Jakubowski
adjakubo@mat.umk.pl
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Zasada warunkowania to *heurystyka*, która pozwala uzyskiwać twierdzenia graniczne dla sum *zależnych* zmiennych losowych z twierdzeń granicznych dla sum *niezależnych* zmiennych losowych. Omówienie wczesnych rezultatów opartych o tę zasadę można znaleźć w [2].

W trakcie wykładu pokażemy, że potencjał zasady warunkowania jest daleki od wyczerpania. Omówione zostaną: twierdzenia graniczne dla łańcuchów Markowa ze stabilnymi granicami [1], nowe centralne twierdzenie graniczne z nietrywialnym normowaniem dla procesów GARCH(1,1) [4] oraz zastosowanie procesów stycznych w definicji całki stochastycznej względem cylindrycznych procesów Lévy'ego [3].

Bibliografia

[1] M. El Machkouri. A. Jakubowski and D. Volný, *Stable limits for Markov chains via the Principle of Conditioning*, online: Stoch. Proces. Appl. (2019).

[2] A. Jakubowski, *Principle of Conditioning in limit theorems for sums of random variables*, Ann. Probab. **14**: 902–915 (1986).

[3] A. Jakubowski and M. Riedle, *Stochastic integration with respect to cylindrical Lévy processes*, Ann. Probab. **45**: 4273–4306 (2017).

[4] A. Jakubowski and Z.S. Szewczak, *A new central limit theorem for GARCH processes without Kesten's regu-*

larity, submitted.

Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Zależności strukturalne procesów wielowymiarowych

Jacek Jakubowski

jakub@mimuw.edu.pl

Uniwersytet Warszawski

W referacie zajmę się zagadnieniem, jak mając dane jednowymiarowe procesy stochastyczne $Y_1, \ldots, Y_n$ należące do pewnej klasy procesów $\mathcal{P}$ (np. łańcuchów Markowa, warunkowych łańcuchów Markowa, procesów Markowa, procesów Hawkesa, semimartyngałów) skonstruować n-wymiarowy proces $X = (X_1, \ldots, X_n)$ należacy do klasy $\mathcal{P}$ i taki, że rozkład procesu brzegowego X_i jest taki sam jak rozkład procesu Y_i dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Jest to modelowanie struktury zależności współrzędnych.

To zagadnienie jest ciekawe z teoretycznego punktu widzenia, a także jest ważne z punktu widzenia zastosowań. Mając model poszczególnych składników zjawiska np. jako procesy Markowa budujemy model całościowy zjawiska jako strukturę Markowa (zatem pozostajemy w klasie procesów Markowa, dla których istnieje dobrze rozwinięta teoria i które mają liczne zastosowania), co pozwala wyciągać wnioski o zachowaniu całego modelu z badania zachowania poszczególnych składników. W szczególności badania statystyczne można rozbić na dwa osobne składniki: badanie statystyczne pojedyńczych składników i estymację struktury.

Referat opiera się na pracach i książce napisanej wspólnie z T.R. Bieleckim z Illinois Institute of Technology, Chicago, USA (Department of Applied Mathematics) oraz z M.

Niewęgłowskim z Wydziału MiNI PW.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Kazimierz Urbanik w probabilistyce

Zbigniew J. Jurek
zjjurek@math.uni.wroc.pl
Uniwersytet Wrocławski

... do osiągnięcia sukcesu potrzebny jest talent, doza krytycyzmu i dobry humor... [KU]

1. Kazimierz Urbanik (1930-2005) urodził się w Krzemieńcu, a po II Wojnie Światowej trafił do Brzegu na Dolnym Śląsku. Jego rodzina, podobnie jak tysiące innych, została przesiedlone na tzw. Ziemie Zachodnie w wyniku umów Jałtańskich. W Brzegu ukończył Liceum Ogólnokształcące, a w latach 1948 -1952 studiował matematykę i fizykę na Uniwersytecie Wrocławskim.

Tu spotkał Hugona Steinhausa oraz Ewarda Marczewskiego, który stał się jego mentorem i po latach wspominał Urbanika tak: *Spotkałem go po raz pierwszy jako 18-letniego studenta I roku na wykładzie z rachunku różniczkowego. Była to jesień 1948r. Obserwowałem go podczas różnych wykładów i seminariów. Uczęszczał w pewnym momencie bodajże na dziewięć seminariów jednocześnie (z ową dziewiątką to może przesada, ale to odwet za jego słowa o mnie). A umiał wykorzystać wszystkie: wykorzystać to znaczy poznać pojęcia i metody danej gałęzi matematyki, a potem zastosować je do rozwiązywania konkretnych problemów. Z rosnącą radością, a potem z podziwem przyglądałem się jego twórczości. Jest to największa radość dla nauczyciela, gdy uczeń go przewyższa.* Marczewski(1974).

We Wrocławiu, na Uniwersytecie, w 1956 roku Urbanik uzyskuje stopień doktora. Mając 34 lata został profesorem zwyczajnym, a rok później, w 1965 roku Polska Akademia Nauk wybiera go na swego członka krespondenta, a w 1973 roku, na członka rzeczywistego. Tę zdumiewającą karierę i aktywność naukową Urbanik łączył z działalnością administracyjną na rzecz środowiska będąc dyrektorem Instytutu Matematycznego przez ponad 20 lat i rektorem Uniwersytetu Wrocławskiego w latach 1975-81.

Bardzo znaczącą rolę dla wrocławskiej, ale też ogólnopolskiej, probabilistyki spełniało słynne seminarium poniedziałkowe *Konwersatorium z analitycznych i funkcjonalnych metod teorii prawdopodobieństwa* zainicjowane przez Steinhausa i Marczewskiego, później współkierowane przez Cz. Rylla- Nardzewskiego, K. Urbanika i W.A. Woyczyńskiego, a w końcu, w zmienionym formacie, przez samego Urbanika (do 2000 roku).

Istotną rolę w aktywności wrocławskiego środowiska probabilistycznego odgrwali S. Gładysz i S. Trybuła z Politechniki Wroclawskiej i W. Klonecki z Wrocławskiego Oddziału PAN.

To z incjatywy Urbanika, z pomocą Rylla-Nardzewskiego i Witolda Kloneckiego, powstało i dalej istnieje, czasopismo *Probability and Mathematical Statistics*, którego Redaktorem Naczelnym od początku do 2005 r. był Urbanik. Do Wrocławia na studia doktoranckie przyjeżdżali zainteresowani z innych ośrodków. Na Uniwersytecie Wrocławskim pod kierunkiem Urbanika powstała (chyba?) pierwsza w Polsce Katedra (później Zakład) Teorii Prawdopodobieństwa. Przez wiele lat seminarium poniedziałkowe było miejscem spotkań wrocławskiego środowiska probabilistów, a szczególnie kolegów z Politechniki Wrocławskiej, sąsiadów z drugiej strony placu Grunwaldzkiego ! Ta bardzo koleżeńska i produktywna symbioza naszych grup była pewnie jednym z powodów, dla których Kazimierz Urbanik w 1976 roku otrzymał Medal Zasłużonych dla Politechniki Wrocławskiej, a w 1995 roku został jej Doktorem Honoris Causa.

Celebrujemy dziś, w Krakowie, 100-lecie PTM i wspominam Mojego Mistrza i Nauczyciela Kazimierza Urbanika. Przypomnijmy więc, że przed ok. 50 laty, Kazimierz Urbanik wygłosił na posiedzeniu Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego w dn. 28 maja 1966 r., w Pałacu Staszica w Warszawie, laudację na uroczystości wręczenia honorowego członkowstwa PTM Kazimierzowi Kuratowskiemu; Urbanik (1967).

W dorobku naukowym Urbanika jest ponad 170 oryginalnych, i z bardzo wielu dziedzin matematyki i fizyki, publikacji naukowych, z czego ponad połowa dotyczy teorii prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych owówionych w Jurek, Rosiński i Woyczyński (2001 i 2005).

[1] K. Urbanik (1967), *Przemówienie na uroczystym posiedzieniu Walnego Zgromadzenia PTM w dn. 26 maja 1966*; Wiadomości Matematyczne, vol. 10, str. 9–11.

[2] E. Marczewski (1974), *Doktorat honoris causa Edwarda Marczewskiego*, Roczniki PTM, Seria II: Wiadomości Matematyczne, vol. XVIII, str. 187-189.

[3] Z. J. Jurek, J. Rosiński, W.A. Woyczyński (2001) *Kazimierz Urbanik and his research*, Demonstratio Math.

XXXIV(2), pp. 219-239.

[4] Z. J. Jurek, J. Rosiński, W. Woyczyński (2005), *Kazimierz Urbanik 1930-2005)*, Probab. Math. Stat., vol. 25 (1), str.1-22;

[5] www.math.uni.wroc.pl/∼zjjurek

2. W tym krótkim wystąpieniu będą omówione tylko trzy zagadnienia, które pokazują, w mojej ocenie, wszechstronność i maestrię matematyczną Urbanika. (Oczywiście wybór jest subiektywnym wyborem referującego !)

a). Sploty (Urbanika) uogólnione. (*Generalized convolutions.*) W 1962r., J. F. C. Kingman (Cambridge, UK), na konferencji w Aarhus (Dania), przedstawił pomysł operacji (splotu) na miarach probabilstycznych na $[0,\infty)$. Mianowicie, dla sferycznie symetrycznych i stochastycznie niezależnych wektorów losowych **X** i **Y** w $\mathbb{R}^n$, rozkład długości wektora sumy **X+Y** wyraził przez rozkłady długości losowych wektorów **X** i **Y** i pewną dodatkową dystrybuantę F na odcinku [-1,1]. W tym nowym schemacie Kingman (1963) opisał m.in. rozkłady stabilne i nieskończenie podzielne.

Urbanik (1964), po powrocie z Aarhus, zaproponował następującą aksjomatyczną teorię splotów uogólnionych $\circ$ na zbiorze $\mathcal{P}$ miar probabilistycznych na $[0,\infty)$:

(i) $P\circ\delta_0 = P$, dla każdego $P\in\mathcal{P}; \delta_a$ oznacza miarę skupioną w $a\geqslant 0$;

(ii) $(aP+(1-a)Q)\circ R = a(P\circ Q)+(1-a)(Q\circ R),\ 0\leqslant a\leqslant 1,$

(iii) $(T_aP)\circ(T_aQ) = T_a(P\circ Q)$, $a\geqslant 0$, i dla E $(T_aP)(E) := P(a^{-1}E)$;

(iv) jeśli $P_n \Rightarrow P$ *to* $P_n\circ Q\Rightarrow P\circ Q$, (ciągłość splotu $\circ$ w słabej topologii);

(v) dla miary δ_1 istnieje ciąg $c_n \geqslant 0$ i miara $\rho \neq \delta_0$ taka, że $T_{c_n}\delta_1^{\circ n} \Rightarrow \rho$.

(Aksjomat (v) **to prawo wielkich liczb dla miary skupionej w 1 !!)**

Parę $(\mathcal{P}, \circ)$ nazywa się *uogólnioną algebrą splotową Urbanika*. Szczególną rolę spełniały tzw. algebry regularne, tzn. te którę dopuszczają nietrywialne ciągłe homomorfizmy $h: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniające warunki: dla $a \geqslant 0$
$h(aP + (1-a)Q) = ah(P) + (1-a)h(Q)$,
$h(P \circ Q) = h(P)h(Q), \; P, Q \in \mathcal{P}$;

Urbanik (1964) podał warunki konieczne i dostateczne na istnienie odpowiednika funkcji charakterystycznej $\Phi_P(t)$, która m. in. identyfikuje miary oraz spełnia warunek

$$\Phi_{P\circ Q}(t) = \Phi_P(t)\,\Phi_Q(t), \quad t \geqslant 0, \quad P, Q \in \mathcal{P}.$$

Wykazał, że w każdej regularnej algebrze $(\mathcal{P}, \circ)$ istnieją miara M (tzw. *miara charakterystyczna* - analogon rozkładu Gaussa) i stała $\kappa > 0$ takie, że dla dowolnej funkcji charakterystyczne Φ_P mamy $\Phi_M(t) = \exp(-c_\Phi t^\kappa)$.

W końcu, Urbanik(1964) opisał odpowiedniki miary $\circ$ -stabilne oraz $\circ$–nieskończenie podzielne. Dowiódł odpowiednika klasycznego wzoru Lévy–Chinczyna:
Φ jest $\circ$ nieskończne podzielna iff
$\Phi(t) = \exp \int_0^\infty \frac{\Omega(tx)-1}{\omega(x)} m(dx)$,
gdzie m jest miarą skończoną, jądro $\Omega(x) := h(x)$, dla ustalonego homomorfizmu h algebry $(\mathcal{P}, \circ)$, a
$\omega(x) := (1-\Omega(x))1_{[0,x_0]}(x) + (1-\Omega(x_0))1_{(x_0,\infty)}(x)$, zaś punkt x_0 jest taki, że $\Omega(x) < 1$ dla $0 < x \leqslant x_0$.

Gdy na poczatku lat 70-ych XX wieku, pojawiło się podejrzenie, że poza pięcioma klasami przykładów splotów uogólnionych podanych w Urbanik(1964) może nie być ich więcej, J. Kucharczyk podał szósty przykład, a w pracy Kucharczyk i Urbanik (1974) podano kolejne, zaś w Kucharczak i Urbanik (1986) stworzono metodę konstrukcji algebr uogólnionych.

W innych pracach Urbanik rozszerzał swoje wyniki obejmujące sytuację gdy algebra splotowa nie dopuszcza nietrywialnych hommomorfizmów. Scharakteryzował obszary przyciągania, opisał selektory dla relacji równoważności. Tylko pięć kolejnych jego publikacji pt. *Generalized convolutions I-V* to 130 stron daleko niebanalnej analizy i abstrakcyjnej algebry !

Problemem otwartm jest stworzenie teorii splotów uogólnionych dla miar na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$!

Podstawowe prace (chronologicznie) w teorii splotów Urbanika to:

[A-1] J. F. C. Kingman (1963), *Random walks with spherical symmetry*, Acta Mathematica, vol.109, str.11- 53.

[A-2] K. Urbanik (1964), *Generalized convolutions*, Studia Math., vol. XXIII, str. 217-245.

[A-3] K. Urbanik (1973), *Generalized convolutions II*, ibidem, vol. 45, str. 53-70.

[A-4] J. Kuchrczak, K. Urbanik (1974), *Quasi-stable functions*, Bull. Acad. Polon. Sci., vol. XXII, no 3, str. 263 -268.

[A-5] K. Urbanik (1984), *Generalized convolutions III*, Studia Math., vol. 80, str. 167-189.

[A-6] J. Kucharczak, K. Urbanik (1986), *Transformations pre-*

serving weak stability, Bull. Pol. Acad. Sci., vol. 34, str. 475–486.
[A-7] K. Urbanik (1986), *Generalized convolutions IV*, Studia Math., vol. 83, str. 57–95.
[A-8] K. Urbanik (1988), *Generalized convolutions V*, *ibidem*, vol. 91, str. 153–178.

Inne osoby publikujące w dziedzinie splotów Urbanika to (w kolejności alfabetycznej): N. Bingham , J. Gilewski, D. Kendal, B. Jasiulis- Gołdys, Z.J. Jurek, J. Misiewicz, V. Volkovich,...

b). Półgrupy (Urbanika) rozkładalności miar. Dla miary probablistycznej μ na przestrzeni $\mathbb{R}^d$ i endomorfizmów (macierzy) $\mathbf{E}nd(\mathbb{R}^d)$, Urbanik(1972) wprowadził pojęcie półgrupy rozkładalności $\mathbf{D}(\mu)$ następująco:

$$\mathbf{D}(\mu) := \{A \in \mathbf{E}nd : \mu = A\mu * \mu_A \text{ dla pewnej miary } \mu_A\}$$

Równoważnie w języku wektorów losowych X mamy

$$\mathbf{D}(X) := \{A : X \stackrel{d}{=} AX + X_A \text{ dla zmiennej losowej } X_A \text{ niezależnej od } X\}.$$

W wielu pracach i wykładach Urbanił mówił: *znajomość topologicznych i algebraicznych własności pólgrupy* $\mathbf{D}(\mu)$ *pozwala więcej powiedzieć o mierze* μ. Na przykład: $\mathbf{D}(\mu)$ jest zwartą półgrupą topologiczną w $\mathbf{E}nd$ wtedy i tylko wtedy gdy nośnik miary μ nie jest podzbiorem żadnej d-1 wymiarowej podprzestrzeni $\mathbb{R}^d$. Takie miary nazywamy *pełnymi* lub *prawdziwie d-wymiarowymi*. Interesującym jest też rola idempotentów w półgrupach Urbanika $\mathbf{D}(\mu)$. Jednakże najbardziej spektakularnym jest chyba następujące zastosowanie pólgrup $\mathbf{D}(\mu)$, w Urbanik (1972) i (1978) oraz w Bradley-Jurek(2016):

Twierdzenie 1.*Niech $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ będzie ciągiem wektorów losowych w $\mathbb{R}^d$, $A_1, A_2, ..., A_n, ..$ ciągiem maciery (operatorów) w $\mathbb{R}^d$ zaś $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ciągiem wektorów w $\mathbb{R}^d$. Jeśli*

(i) (X_n) są stochastycznie niezależne;

(ii) $A_nX_1,\ A_nX_2,\ ...,\ A_nX_n, n \geqslant 1$ tworzą układ infinitezymalny;

(tzn. $max_{1\leqslant k\leqslant n} P(||A_nX_k|| > \epsilon) \to 0$ dla każdego $\epsilon > 0$;)

(iii) $A_n(X_1 + X_2 + ... + X_n) + a_n \Rightarrow \mu$ i μ jest miarą pełna;

wtedy istnieje macierz Q taka,że $e^{-tQ} \in \mathbf{D}(\mu)$ dla każdego $t \geqslant 0$ oraz

$e^{-tQ} \to 0$ gdy $t \to \infty$.

Na odwrót, jeśli półgrupa $\mathbf{D}(\mu)$ zawiera ciągłą jednoparametrową podpółgrupę to μ daje się zrealizować jako rozkład graniczny ciagu postaci (iii) i z założeniami (i) , (ii).

Rozkłady graniczne w (iii) nazywamy *rozkładami operatorowo-samo-rozkładalnymi* i ozn. przez $L_0(Q)$, gdy ustalimy wykładnik Q. Może być więcej półgrup jednoparametrowych w $\mathbf{D}(\mu)$; Jurek-Mason(1993).

Urbanik w (1972) , (1978) opisał rozkłady graniczne (μ), w powyższym twierdzeniu w terminach funkcji charakterystycznych (transformat Fouriera). Dokonał tego wykorzystując słynne twierdzenia Kreina-Milman-Choqueta o punktach ekstremalnych w zbiorze zwartym i wypukłym.

W Jurek(1982) dowiedziono,że $\{e^{-tQ},\ t \geqslant 0\} \subset \mathbf{D}(\mu)$ iff $\mu = \mathcal{L}(\int_0^\infty e^{-tQ} dY(t)),\ \mathbb{E}[\log(1 + |Y(1)|] < \infty$,
gdzie $Y(t), t \geqslant 0$ jest procesem Lévy'ego. Z powyższej repre-

zentacji całkowej otrzymuje się postać funkcji charkterystycznej miary μ dokładnie w postaci jaką otrzymał Urbanik via punkty ekstremalne.

W Bradley, Jurek (2016) rozszerzono powyższe twierdzenie dla ciągów (X_n) w (i) spełniających warunek mocnego mieszania (strong mixng).

Wybrane referencje (chronologicznie) dla powyższych zagadnień to:

[**B-1**] M. Sharpe(1969), *Operator-stable probability distributions on vector groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 136, str. 51-65.

[**B-2**] K. Urbanik (1972), *Lévy's probability measures on Euclidean spaces*, Studia Math. vol. 44, str, 119-148.

[**B-3**] K. Urbanik (175), *Decomposability properties of probability measures*, Sankya vol. 37, Ser. A, str. 530-537.

[**B-4**] K. Urbanik (1978), *Lévy's probability measures on Banach spaces*, Studia Math. vol. 63, str, 283-308.

[**B-5**] W. Krakowiak (1979), *Operator-stable probability measures on Banach spaces*, Colloq. Math., vol. 41, str. 313-326.

[**B-6**] Z. J. Jurek (1982), *An integral representation of operator-selfdecomposable random variables*, Bull. Acad. Polon. Sci., vol. 30, str. 385-393.

[**B-7**] Z. J. Jurek, J.D. Mason (1993), *Operator-limit distributions in probability theory*, J.Wiley & Sons, New York str. xiii -292.

[**B-8**] R.C. Bradley, Z. J. Jurek (2016), *Strong mixing and operator-selfdecomposability*, J. Theor. Probab. vol. 29 (1), str. 292-306.

c). Nieliniowe transformacje ściągające U_r. W latach 70-tych XX wieku swoje sukcesy święciła probabilistyka na przestrzeniach Banacha. Zwykle (tradycyjnie) sumy częściowe obserwacji były normowane przez skalary nawet gdy obserwacje były z przestrzeni wielowymiarowych. Naturalnym było normownie operatorami liniowymi tak jak w poprzedniej, powyższej części **b).** , tego wystąpienia. Nie wiem w jakich okolicznościach Urbanik pomyślał o nieliniowych transformacjach ale ok. 1971 roku podał transformacje $T_c(x) := \max(x - c, 0)$ (oryginalna notacja Urbanik) i postawił mi zadanie, w ramach mojej pracy magisterskiej, Jurek(1972), opisanie klasy rozkładów granicznych sum postaci

$$T_{c_n}(X_1) + T_{c_n}(X_2) + \ldots + T_{c_n}(X_n) + x_n, \tag{1}$$

gdzie $(X_n > 0)$ są i.i.d., a $c_n > 0$.

Rozkłady graniczne w (1) to rozkłady skupione w punktach dodatnich i złożone rozkłady Poissona, w których składniki sumy mają rozkład wykładniczy; zob. Jurek(1972).

Później, zamiast T_c, które myliło się z mnożeniem przez c (patrz: sploty uogólnione), używane było U_r, $r > 0$, i na przestrzeni liniowej unormowanej H, określone następująco: $U_r : H \to H, \quad U_r(x) := \max(||x|| - r)\,\frac{x}{||x||}$
dla $x \neq 0; \quad U_r(0) := 0$.
Transformacje U_r (w języku angielskim: *shrinking operation* lub krótko *s-operation*) są oczywiście nieliniowe i tworzą jednoparametrową półgrupę: $U_r(U_s(x)) = U_{r+s}(x), r, s > 0$. W Jurek (1977), gdzie H jest przestrzenią Hilberta, mamy

Twierdzenie 2. *Jeśli* (X_n) *zmiennymi losowymi o wartościah* *w H, $r_n > 0$ oraz $x_n \in H$ takimi,że*

(i) (X_n) są stochastycznie niezależne;

(ii) $U_{r_n}X_1,\ U_{r_n}X_2, ..., U_{r_n}X_n$ tworzą układ infinitezymaly;

(iii) $U_{r_n}X_1 + U_{r_n}X_2 + ... + U_{r_n}X_n + x_n \Rightarrow \mu$;

to albo μ jest rozkładem Gaussowskim albo μ jest nieskończenie podzielnym złożonym rozkładem Poissona bez części Gaussowskiej.

Zachodzi też twierdzenie odwrotne.

Rozkłady μ w powyższym twierdzeniu nazywane są *s-samorozkładalnymi* i oznaczne są jako klasa $\mathcal{U}$. Houasworth i Shao (2000) podali centralne twierdzenie graniczne dla transfromacji U_r, tzn. warunki kiedy w (iii) w Twierdzeniu 2 jest rozkład nomalny. Bradley i Jurek (2015) dowiedli ich CLT gdy w założeniu (i) ciąg elementy ciągu (X_n) są tylko słabo zależne.

Pomimo tego, że rozkłady samorozkładalne, tzn. klasa L_0, są zdefiniowane poprzez liniowe transformacje (mnożenie przez stałe!), a rozkłady s-samorozkładalne, tzn. klasa $\mathcal{U}$, są zdefinowane poprzez nieliniowe transformacje U_r to zachodzi następująca inkluzja

$L_0 \subset \mathcal{U} \subset ID$, (klasa rozkładów nieskończenie podzielnych);

zob. Jurek(1985).

Wybrane referencje (chronologicznie) na temat normowań przez U_r :

[C-1] Z. J. Jurek(1972), *On some class of limiting distributions*, MS thesis, June 1972, University of Wrocław: także na arXiv:1906.10522v1 [math.PR]] 25 June 2019.

[**C-2**] Z.J. Jurek (1981), *Limit distributions for sums of sharunken random variables*, Dissertationes Math. vol. 185 (46 str), PWN Warszawa. [Przyjęta do druku, listopad 1977r.]]

[**C-3**] Z. J. Jurek (1985), *Relations between the s-selfdecomposable and selfdecomposable measures*, Ann. Probab., vol. 13, str. 592-608.

[**C-4**] E. Housworth, Q.M. Shao (2000), *On central limit theorem for shrunken random variables*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 128, str. 261-267.

[**C-5**] R.C. Bradley, Z. J . Jurek (2015), *On central limit theorem for shrunken weakly dependent random variables*, Houston Journal of Math., vol. 41, no 2, str. 621- 638 .

• Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Sub-trees of a random tree

Bogumił Kamiński
bkamins@sgh.waw.pl
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Co-author:
Paweł Prałat
pralat@ryerson.ca
Ryerson University

Let $\mathcal{T}$ be a random tree taken uniformly at random from the family of labelled trees on n vertices. In this note, we provide bounds for $c(n)$, the number of sub-trees of $\mathcal{T}$ that hold asymptotically almost surely (a.a.s.). With computer support we show that a.a.s. $1.41805386^n \leqslant c(n) \leqslant 1.41959881^n$. Moreover, there is a strong indication that, in fact, a.a.s. $c(n) \leqslant 1.41806183^n$.

• Powrót do indeksu abstraktów sekcji

The Sibuya distribution and stochastic extrema

Tomasz J. Kozubowski
tkozubow@unr.edu
University of Nevada, USA

Co-author:
Krzysztof Podgórski
Lund University, Szwecja

The Sibuya distribution arises as the distribution of the waiting time for the first success in Bernoulli trials, where the probabilities of success are inversely proportional to the number of a trial. We summarize basic facts regarding this distribution, and provide several new results and characterizations, shedding more light on its origin and possible applications. In particular, we emphasize the role Sibuya distribution plays in the extreme value theory and point out its invariance property with respect to random thinning operation. Our results provide a stochastic interpretation of generalized distributions obtained through proportional hazard and reversed hazard transformations, involving maxima and minima with a random number of terms. We also discuss generalizations to random process and further extensions.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Własności półgrup dla rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych z szumem Lévy'ego

Tadeusz Kulczycki

Tadeusz.Kulczycki@pwr.edu.pl

Politechnika Wrocławska

Rozważamy stochastyczne równanie różniczkowe $dX_t = A(X_{t-})\,dZ_t$, $X_0 = x$, gdzie $Z_t = (Z_t^{(1)}, \ldots, Z_t^{(d)})^T$, oraz $Z_t^{(1)}, \ldots, Z_t^{(d)}$ są niezależnymi, jednowymiarowymi procesami Lévy'ego z wykładnikami charakterystycznymi $\psi_1, \ldots, \psi_d$, oraz $A(x) = (a_{ij}(x))$ są macierzami wymiaru $d \times d$. Zakładamy, że wszystkie ψ_i spełniają pewne warunki regularności, wyznaczniki macierzy $A(x)$ są ograniczone z góry i z dołu przez stałe dodatnie, oraz $x \to a_{ij}(x)$ są funkcjami ograniczonymi, spełniającymi warunek Lipschitza. Pokazujemy, że istnieje $\gamma > 0$ taka, że półgrupa P_t procesu X_t spełnia $|P_t f(x) - P_t f(y)| \leqslant c_t |x - y|^\gamma ||f||_\infty$ dla dowolnych ograniczonych funkcji borelowskich f, $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$. Udowadniamy także istnienie gęstości prawdopodobieństwa przejścia dla procesu X_t.

Referat jest na podstawie artykułów [1, 2].

Bibliografia

[1] T. Kulczycki, M. Ryznar, P. Sztonyk, *Strong Feller property for SDEs driven by multiplicative cylindrical stable noise*, arXiv:1811.05960 (2018).

[2] T. Kulczycki, M. Ryznar, *Semigroup properties of solutions of SDEs driven by Lévy processes with indepen-*

dent coordinates, arXiv:1906.07173 (2019).

Norma ℓ^p dyskretnej transformaty Hilberta

Mateusz Kwaśnicki
mateusz.kwasnicki@pwr.edu.pl
Politechnika Wrocławska

Transformata Hilberta:

$$H_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y} \, dy$$

jest najprostszym i jednocześnie najważniejszym operatorem całki singularnej. Hilbert udowodnił, że $H_{\mathbb{R}}$ jest operatorem unitarnym na $L^2(\mathbb{R})$; M. Riesz wykazał, że jest to operator ograniczony na $L^p(\mathbb{R})$ gdy $p \in (1, \infty)$; zaś Pichorides wyznaczył normę operatorową $H_{\mathbb{R}}$ na $L^p(\mathbb{R})$: zachodzi $H_{\mathbb{R}p \to p} = \max\{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2p}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p}\}$.

Równie interesujące, zarówno z punktu widzenia teorii, jak i zastosowań, są dyskretne odpowiedniki transformaty Hilberta. Najprostsza możliwa definicja, wprowadzona już przez Hilberta, to:

$$H_{\mathbb{Z}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n-k}}{k} \, ;$$

(a_n) jest tu ciągiem indeksowanym liczbami całkowitymi.
M. Riesz i Titchmarsh niezależnie od siebie udowodnili, że $H_{\mathbb{Z}}$ jest operatorem ograniczonym na ℓ^p gdy $p \in (1, \infty)$. Dodatkowo Titchmarsh wykazał, że $H_{\mathbb{Z}}$ jest *dyskretyzacją* transformaty Hilberta $H_{\mathbb{R}}$, tj.$H_{\mathbb{R}} f(x)$ może być przybliżane przez $H_{\mathbb{Z}} a_{\lfloor Nx \rfloor}$, jeśli $a_n = f(\frac{n}{N})$ oraz $N \to \infty$. Stąd wynika nierówność $H_{\mathbb{Z}p \to p} \geqslant H_{\mathbb{R}p \to p}$. Titchmarsh twierdził, że w istocie

zachodzi równość:

$$H_{\mathbb{Z}p\to p} = H_{\mathbb{R}p\to p},$$

lecz podany przez niego dowód tego faktu zawierał istotny błąd. Od tego czasu pytanie o równość norm ciągłej i dyskretnej transformaty Hilberta pozostawało otwarte, z wyjątkiem szczególnego przypadku $p = 2^n$ lub $p = 2^n/(2^n - 1)$ dla $n = 1, 2, \ldots$

We wspólnej pracy z Rodrigiem Bañuelosem dowodzimy brakującej nierówności:

$$H_{\mathbb{Z}p\to p} \leqslant \max\{\operatorname{tg} \tfrac{\pi}{2p}, \operatorname{ctg} \tfrac{\pi}{2p}\}$$

i w ten sposób rozstrzygamy opisaną wyżej hipotezę. Choć rezultat jest analityczny, wykorzystujemy probabilistyczne metody: dyskretny ciąg (a_n) jest wykorzystywany do konstrukcji odpowiedniej *ciągłej* transformaty martyngałowej i dowodzona nierówność wynika z nierówności martyngałowej Burkholdera (w wersji Bañuelosa–Wanga).

Bibliografia

[1] R. Bañuelos, M. Kwaśnicki, *On the ℓ^p norm of the discrete Hilbert transform*, Duke Math. J. **168**: 471–504 (2019).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Lamperti transformation - Cure for ergodicity breaking

Marcin Magdziarz
marcin.magdziarz@pwr.edu.pl
Centrum im. Hugona Steinhausa, Politechnika Wrocławska

Recent results in single-particle experiments show that many complex systems display ergodicity breaking. In this talk we demonstrate how to transform a non-ergodic anomalous diffusion process in order to recover the ergodicity property. In the introduced method we use the Lamperti transformation. Our approach enables us to perform statistical inference using only one recorded trajectory of the analyzed process even in the case when the original process displays ergodicity breaking. The method can be applied to examine many important examples of non-ergodic anomalous diffusion models, including space-time fractional Fokker-Planck equations, Lévy walks or subordinated fractional Brownian motions.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Stochastyczne równanie quasi-geostroficzne

Elżbieta Motyl
elzbieta.motyl@wmii.uni.lodz.pl
Uniwersytet Łódzki

Podstawym równaniem stosowanym m.in. w oceanografii do opisu zjawisk występujących na powierzchni wody jest powierzchniowe równanie quasi-geostroficzne postaci

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\theta \; = \; 0.$$

Tutaj $\theta : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oznacza temperaturę, natomiast $v : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest prędkością cieczy. Zależność pomiędzy prędkością v i temperaturą θ wyraża się wzorem $v = R^T \theta = (-R_2\theta, R_1\theta)$, gdzie R_j oznacza j-tą transformatę Riesza ($j = 1, 2$). Rozpatrywane są także rozmaite uogólnienia powyższego równania. Przedmiotem rozważań jest zagadnienie początkowe dla abstrakcyjnego równania stochastycznego postaci

$$\begin{cases} du + [(\mathcal{R}u \cdot \nabla)u + \nu(-\Delta)^\alpha u]\, dt = f(t)\, dt + G(t, u)\, dW(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, uwzględniające dodatkowo zjawiska dyssypacji oraz deterministyczne i losowe oddziaływania zewnętrzne. Powyższe równanie obejmuje w szczególności stochastyczne dyssypatywne równanie quasi-geostroficzne (wówczas $u = \theta$). Przedstawione zostaną wyniki dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązań powyższego zagadnienia, uzyskane we współpracy z Z. Brzeźniakiem.

Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Bayesian interpretation of some Empirical Bayes procedures in hierarchical models

Jacek Osiewalski
eeosiewa@cyf-kr.edu.pl
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

In modern statistics and its applications random parameters or latent variables are widely used, and their estimation or prediction is of interest. Under some prior assumptions, Bayes formula can be used to obtain their posterior distribution. However, on the sampling-theory grounds, the unknown constants appearing in the prior distribution are estimated using the data being actually modelled. We call such approaches quasi-Bayesian; Empirical Bayes procedures give important examples. In this paper we propose theoretical framework that enables the formal Bayesian validation (or interpretation) of quasi-Bayesian inference techniques. Our framework amounts to establishing a formal Bayesian model that justifies a quasi-Bayesian ”posterior” as a valid posterior distribution. From the Bayesian model validating the quasi-posterior, i.e. from the joint distribution of observations and other quantities, one can deduce the true sampling model, that is the conditional distribution of observations, and the true prior (or marginal) distribution of the remaining quantities â latent variables and parameters. We illustrate our approach not only by simple examples, but also by the complicated Bayesian model validating one of the basic Empirical Bayes estimators of the multivariate normal mean. This model is in fact a non-standard joint measure that separates

two subsets of the Cartesian product of the observation space and the parameter space.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Niezwykła uporczywość średniej próbkowej w zbiorze zwartym czyli o nieskończonej liczbie ciężko-ogonowych skoków

Zbigniew Palmowski
zbigniew.palmowski@pwr.edu.pl
Politechnika Wrocławska

W referacie będziemy rozważać średnią próbkową ze scentrowanego błądzenia przypadkowego w $\mathbb{R}^d$ z przyrostami o rozkładzie regularnie zmieniającym się. Pokażemy, że ogon rozkładu pierwszego wyjścia tej średniej próbkowej ze zbioru zwartego nie zawierającego zera jest typu lognormalnego. Udowodnimy również, że typowa asymptotyczna ścieżka realizująca zdarzenie polegające na pobycie w tymże zbiorze dłuższym niż n jest realizowana poprzez nieskończoną liczbę skoków rosnącą logarytmiczne względem n. Referat jest oparty o wspólną pracę [1] z A. Bhattacharya i B. Zwartem.

Bibliografia

[1] A. Bhattacharya, Z. Palmowski, B. Zwart, *Persistence of heavy-tailed sample averages occurs by infnitely many jumps*, złożony do publikacji, https://arxiv.org/abs/1902.09922, (2019).

• Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Stochastic Episodes with Light and Heavy Tails: Models, Properties, and Testing

Anna Panorska
ania@unr.edu
University of Nevada Reno, USA

Co-authors:
Marek Arendarczyk
Tomasz J. Kozubowski
tkozubow@unr.edu
University of Nevada, USA
Fares Qeadan

We discuss the problem of modeling the joint distribution of duration (N), maximum (Y) and magnitude (X) of stochastic episodes (events). An event is defined as consecutive observations of a process above (or below) a threshold. Examples of events include growth (or decline) periods of a financial series or climatic or hydrologic episodes, e.g. flood, draught, heat wave, cold spell, etc. The distribution of the vector (N, X, Y) is of direct interest to water management, energy management companies, disaster management, health departments, investors, actuaries, as well as state and federal regulatory agencies. We present exponentially and heavy tailed models and a likelihood ratio test for deciding between them. We illustrate the modeling potential of these distributions using questions and data from climate, hydrology and finance.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Problem Amemiya-Ando, produkty kontrakcji, produkty warunkowych wartości oczekiwanych, inne wyniki geometrycznej teorii operatorów

Adam Paszkiewicz

adam.paszkiewicz@wmii.uni.lodz.pl

Uniwersytet Łódzki

Omówimy wyniki dotyczące problemu Amemiya-Ando oraz możliwych przebiegów trajektorii $(P_n \cdots P_1 x;\ n \in \mathbb{N})$, gdy $P_1, P_2, \ldots$ są elementami ustalonego skończonego zbioru kontrakcji $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ w przestrzeni Hilberta H, zaś x jest pewnym wektorem z H. Dla operatora $A = A^* \in B(H)$ omówimy możliwe rozkłady $A = a_1 Q_1 + \cdots + a_k Q_k$, $a_i \in \mathbb{R}$, $Q_i \in \mathrm{Proj} H$. Omówimy jak rozstrzygnięcia wspomnianych problemów zmieniają się, gdy zażądamy by wszystkie kontrakcje i projekcje $Q_1, \ldots, Q_k$ należały do algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ określonego typu. Wiele wyników dotyczących trajektorii można uzyskać dla bardzo specjalnych operatorów $Q_1, \ldots, Q_k$, będących warunkowymi wartościami oczekiwanymi (w przestrzeni $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).

Zwrócimy uwagę na pokrewne metody wzięte z teorii sepektralnej pewnych złożeń i kombinacji liniowych projekcji. Omówimy metody związane ze stanem śladowym τ na skończonej algebrze $\mathcal{M}$, a także metody z elementarnej teorii funkcji i ogólnej teorii pól gaussowskich.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

On a certain characterization of Young measures associated with bounded Borel functions

Piotr Puchała
p.st.puchala@gmail.com
Politechnika Częstochowska

Co-author:
Andrzej Z. Grzybowski
andrzej.grzybowski@im.pcz.pl
Politechnika Częstochowska

We formulate probabilistic characterization of Young measures associated with bounded Borel functions. We then use this characterization to obtain an explicit form of Young measures associated with fast oscillating functions via Monte Carlo simulations.

References

[1] A. Z. Grzybowski and P. Puchała, *On simulation of the Young measures – comparison of random-number generators*, J. Inform. Org. Sci. **41**: 171–184 (2017).

[2] A. Z. Grzybowski and P. Puchała, *On general characterization of Young measures associated with Borel functions*, preprint, arXiv:1601.00206v2 (2017).

[3] P. Puchała, *An elementary method of calculating an explicit form of Young measures in some special cases*, Optimization **63**: 1419–1430 (2014).

[4] T. Roubíček, *Relaxation in optimization theory and variational calculus*, Walter de Gruyter, Berlin, New York 1997.

[5] L. C. Young, *Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations*, Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, classe III **30**: 212–234 (1937).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Początki procesów punktowych i wkład Czesława Ryll-Nardzewskiego do teorii

Tomasz Rolski tomasz.rolski@math.uni.wroc.pl
Uniwersytet Wrocławski

Podczas odczytu przedstawię zarys historii procesów punktowych w szczególności procesu Poissona. Na tym tle omówię pionierski wkład profesora Ryll-Nardzewskiego do tej teorii, jego prace dotyczące procesu Poissona oraz pojęcia rozkładu Palma dla stacjonarnych procesów punktowych.

Bibliografia

[1] T. Rolski, *A note on the history of Poisson processes*, 2019,
www.math.uni.wroc.pl/∼ rolski.

[2] T. Rolski and W.A. Woyczyński, *In memoriam: Czeslaw Ryll-Nardzewski's contributions to probability theory*, Probability and Mathematical Statistics. **37** 1–28 (2017), doi:10.19195/0208-4147.37.1.1.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Asymptotyka rozwiązań półliniowych równań ewolucyjnych

Andrzej Rozkosz
rozkosz@mat.umk.pl
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Rozważać będziemy rozwiązania renormalizowane problemu Cauchy'ego

$$\partial_t u - Lu + \lambda u = f(x,u) + g(x,u)\cdot\mu, \quad u(0,\cdot) = \varphi, \qquad (*)$$

gdzie L jest operatorem generowanym przez pewną formę Dirichleta, $\lambda \geqslant 0$ i μ jest miara gładką względem pojemności wyznaczonej przez tę formę. Podamy pewne naturalne warunki na dane f, g i φ, przy których

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v(x), \qquad (**)$$

gdzie v jest rozwiązaniem renormalizowanym równania stacjonarnego odpowiadającego równaniu $(*)$. Podamy także tempo zbieżności i przykłady zastosowań. Definicje rozwiązań u i v można sformułować probabilistycznie. Również dowody zbieżności $(**)$ i oszacowania tempa są w pełni probabilistyczne.

Wyniki pochodzą z pracy [1] napisanej z T. Klimsiakiem.

Bibliografia

[1] T. Klimsiak and A. Rozkosz, *Large time behavior of solutions to parabolic equations with Dirichlet operators and nonlinear dependence on measure data*, Potential Anal. https://doi.org/ 10.1007/s11118-018-9711-9.

Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Embedding Erdős-Rényi Random Graphs into Random Regular Graphs

Andrzej Ruciński

rucinski@amu.edu.pl

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

The relationship between Erdős-Rényi models $\mathbb{G}(n, m)$ and regular models $\mathbb{G}(n, d)$ of random graphs was first studied by Kim and Vu in 2004. In particular, they showed that in a wide range of m, one can couple the two so that a.a.s. $\mathbb{G}(n, m) \subset \mathbb{G}(n, d)$, where $m = (1 - o(1))\frac{2m}{n}$. Later Dudek, Frieze, Ruciński, and Šileikis extended the range of m a little and also generalized their result to random k-uniform hypergraphs. Still, the range of m has been limited to $m = o(n^k)$.

Recently, while proving an analogous result for bipartite random graphs we found a way to cover the case $m = \Theta(n^2)$ as well. Besides standard switching techniques, the proof relies heavily on a purely deterministic result about the presence of alternating cycles in two-colored quasi-random graphs. During my talk I will outline the proof in the bipartite model. This is joint work with
T. Klimošová, Chr. Reiher, and M. Šileikis.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Asymptotyka rozkładów procesów kawałkami deterministycznych

Ryszard Rudnicki

rudnicki@us.edu.pl

Polska Akademia Nauk

Rozpoczniemy od przypomnienia definicji kawałkami deterministycznego procesu Markowa (PDMP) oraz podamy kilka przykładów występujących w opisie modeli biologicznych [2]. Następnie podamy związek tych procesów z półgrupami stochastycznymi. Wyjaśnimy na czym polegają problemy z badaniem ewolucji rozkładów takich półgrup. Centralnym punktem wykładu będzie ogólne twierdzenie o asymptotycznym rozkładzie operatorów i półgrup stochastycznych [1]. Twierdzenie to przy bardzo minimalnym założeniu dotyczącym ich części całkowej, podaje pełny opis asymptotycznego rozkładu półgrupy na części, w których mamy zbieżność do pewnej gęstości (zależnej od wyjściowego rozkładu) i wymiatanie. Sformułujemy ważne wnioski z tego twierdzenia, jego związek ze wcześniejszymi rezultatami. Przedstawimy też w jaki sposób twierdzenie to stosuje się w badaniu półgrup stochastycznych związanych z PDMP.

Bibliografia

[1] K. Pichór, R. Rudnicki, *Asymptotic decomposition of substochastic operators and semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **436**: 305–321 (2016).

[2] R. Rudnicki, M. Tyran-Kamińska, *Piecewise Deterministic Processes in Biological Models*, Springer Briefs

in Mathematical Methods, Berlin 2017.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Liczba izomorficznych kopii danego grafu w grafie losowym

Grzegorz Serafin
grzegorz.serafin@pwr.wroc.pl
Politechnika Wrocławska

Niech $\mathbb{G}_n(p)$ będzie grafem losowym Erdősa-Rényi'ego, który powstaje z grafu pełnego K_n o n wierzchołkach, gdy każda jego krawędź istnieje z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Dla ustalonego grafu G definiujemy zmienną losową N_n^G, która zlicza podgrafy grafu $\mathbb{G}_n(p)$ izomorficzne z G, oraz jej normalizację

$$\tilde{N}_n^G := \frac{N_n^G - \mathsf{E}[N_n^G]}{\sqrt{\mathrm{Var}[N_n^G]}}.$$

Przy odpowiednich warunkach nałożonych na p i n, ciąg zmiennych N_n^G zbiega do standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}$. Naszym celem jest oszacowanie tempa tej zbieżności. W pracy [1] zostało pokazane, że

$$d_W\left(\tilde{N}_n^G, \mathcal{N}\right) \leqslant C_G \left((1-p_n) \min_{\substack{H \subset G \\ e_K \geqslant 1}} \{n^{v_H} p_n^{e_H}\}\right)^{-1/2}, \quad (1)$$

gdzie C_G jest stałą zależną jedynie od grafu G, a d_W oznacza odległość Wassersteina zdefiniowaną przez

$$d_W(X, Y) := \sup_{h \in \mathrm{Lip}(1)} |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(Y)]|,$$

dla zmiennych losowych X oraz Y. Niemniej jednak, bardziej naturalna oraz precyzyjna jest odległość Kołmogorowa

$$d_K(X, Y) := \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \mathbf{P}\left(X \leqslant a\right) - \mathbf{P}\left(Y \leqslant a\right) \right| .$$

Dobrze znana jest nierówność $d_K\left(X, \mathcal{N}\right) \leqslant \sqrt{d_W\left(X, \mathcal{N}\right)}$, jednak daje ona gorsze tempo zbieżności niż dla odległości Wassersteina.

W trakcie referatu pokażemy, że odległość $d_K(\tilde{N}_n^G, \mathcal{N})$ może być oszacowana przez wyrażenie ze wzoru (1). Problem ten był otwarty przez 30 lat, choć niedawno udało się go rozwiązać w najprostszym przypadku – dla trójkąta jako grafu G [2]. Dodatkowo wprowadzona zostanie szeroka klasa grafów, dla których minimum ze wzoru (1) bardzo się upraszcza. Wyniki te zostały osiągnięte we współpracy z N. Privault.

Bibliografia

[1] Barbour A.D., Karoński M., Ruciński A. *A central limit theorem for decomposable random variables with applications to random graphs.* J. Combin. Theory Ser. B, **47**(2):125–145 (1989).

[2] Röllin A. *Kolmogorov bounds for the normal approximation of the number of triangles in the Erdős-Rényi random graph.* arXiv:1704.00410 (2017).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Problemy sterowania procesem Markowa ze zdegenerowaną obserwacją

Łukasz Stettner
stettner@impan.pl
Polska Akademia Nauk

Rozpatrujemy zagadnienie sterowania z procesem Markowa czasem dyskretnym z niepełną obserwacją, która jest w postaci zdegenerowanej. Obserwujemy wartość deterministycznej funkcji of procesu stanu. Jest to trudny przypadek w odróżnieniu od znanego przypadku gdy obserwacja jest zakłócona addytywnym szumem. Prowadzi to niestandardowych zagadnień filtracji. Ponieważ interesuje nas kryterium średni koszt na jednostkę czasu musimy badać zachowanie się tego sterowanego procesu na długim horyzoncie czasowym. Okazuje się, że bazujŁc na własnościach funkcji wypukłych przy stosunkowo mocnych założeniach regularnościowych (w języku norm Hilberta) udaje się rozwiązać problem dość sprytnie adaptując technikę z pracy [1]. Podobne wyniki teŁ można uzyskać w przypadku zakłóconej, ale nie regularnie obserwacji (to znaczy gdy filtracje zależą od warunków początkowych. Wyniki zostały opublikowane w pracy [2].

References

[1] Ł. Stettner, *Ergodic Control of Partially Observed Markov Processes with Equivalent Transition Probabilities*, Applicationes Mathematicae **22,1**: 25–38 (1993).
[2] Ł. Stettner, *Long run control of Markov processes with degenerate observation*, SIAM J. Control Optim. **57**:

880–899 (2019).
Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Steinhausowskie seminarium matematyki stosowanej

Władysław Szczotka
szczotka@math.uni.wroc.pl
Uniwersytet Wrocławski

W referacie przedstawię genezę *Steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej,* jego główny cel, atmosferę oraz wybrane problemy z dyscyplin naukowych pojawiających się na tym Seminarium. Omawiam jedynie okres *steinhausowski,* tj. lata od 1948 do 1960 roku, w których profesor Hugo Steinhaus był kierownikiem tego Seminarium. Spectrum problemów było nieograniczone. Omawiano różnorodne problemy z antropologii, archeologii, architektury, astronomii, nauk biologicznych, geograficznych, geologicznych, filologicznych, medycznych, rolniczych, technicznych i matematycznych. Referat jest oparty na moich dwóch artykułach:
[1] *Fenomen Steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej – Zarys koncepcji,* Antiquitates Mathematicae, Vol. 12(1), 2018, p. 197–228,
[2] *Fenomen Steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej – Tematyka,* Antiquitates Mathematicae, 2019.
Są one oparte na czterech zeszytach protokołów z tego Seminarium, nigdzie dotąd nie omawianych. Otrzymałem je od profesora Józefa Łukaszewicza około 2008 roku, jako jego następca na stanowisku kierownika Zakładu Zastosowań Matematyki.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Twierdzenia graniczne dla pewnej klasy wycałkowanych procesów nieskończenie podzielnych

Anna Talarczyk-Noble
annatal@mimuw.edu.pl
Uniwersytet Warszawski

Rozważamy klasę procesów nieskończenie podzielnych wprowadzoną przez Barndorff-Nielsena w 2011r., tzw. "trawl processes". Mają one postać

$$X_t = \Lambda(A_t),$$

gdzie Λ jest jednorodną, niezależnie rozproszoną miarą losową nieskończenie podzielną na $\mathbb{R}^2$, a A_t zbiorem powstałym przez przesunięcie o $(0, t)$ ustalonego zbioru borelowskiego w $\mathbb{R}^2$. Badamy zachowanie unormowanego procesu całkowego

$$Y_T(t) = \frac{1}{F_T} \int_0^{Tt} X_s ds, \qquad t \geqslant 0.$$

gdy $T \to \infty$, gdzie F_T jest normowaniem dobranym tak, by procesy Y_T zbiegały, co najmniej w sensie rozkładów skończenie wymiarowych. Zakładamy, że Λ nie ma części gaussowskiej, a miara Lévy'ego z nią związana jest symetryczna. Ciekawy jest przypadek, gdy A_0 opisane jest jako obszar ograniczony osiami współrzędnych oraz wykresem pewnej funkcji $x \mapsto g(-x)$, gdzie $g : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ stosunkowo wolno zmienia się w nieskończoności ($g(x) \sim x^{-1-\gamma}$ dla $0 < \gamma < 1$). W zależności od związku pomiędzy parametrem

γ, a miarą Lévy'ego opisującą Λ otrzymujemy różne rodzaje granic. Są to procesy stabilne, samopodobne, o stacjonarnych przyrostach. W pewnych przypadkach przyrosty są zależne, w innych nie.

Praca wspólna z Łukaszem Treszczotko.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

W służbie społeczeństwu, czyli modelowanie matematyczne w praktyce

Karol Wawrzyniak
karol.wawrzyniak@idea.edu.pl
Narodowe Centrum Badań Jądrowych

W ramach referatu przestawiony zostanie charakter pracy Interdyscyplinarnego Zakładu Analiz Energetycznych (www.idea.edu.pl). Zespół, łącząc kompetencje modelowania matematycznego, energetyki, ekonomii oraz informatyki, od kilku lat z sukcesem buduje innowacyjne rozwiązania adresując potrzeby sektora energii, w tym takich podmiotów jak Komisja Europejska, operatorzy sieci przesyłowych, czy też samorządy. W większości projektów praca zespołu łamie popularny w energetyce paradygmat bazujący na deterministycznym modelowaniu analizowanych zjawisk. Zwiększająca się ilość źródeł odnawialnych, prosumentów oraz stosowanie coraz bardziej zaawansowanych technologii, powodują konieczność wprowadzenia metod stochastycznych. W następstwie pojawiają się ciekawe wyzwania, zarówno koncepcyjne, jak i obliczeniowe, z których kilka wybranych zostanie przestawionych w referacie.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Hugo Steinhaus - matematyk na każdy sezon

Aleksander Weron
aleksander.weron@pwr.edu.pl
Poliechnika Wrocławska

W referacie omówimy siedem wybranych epizodów z działalności Hugona Steinhausa z zakresu matematyki stosowanej.

Bibliografia

[1] Hugo Steinhaus, *Mathematician for All Seasons. Recollections and Notes*, Birkhauser, Cham Heidelberg, Vol.1 2015 and Vol.2 2016.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Mathematics in Finance: On option valuation and its applications to solving certain real-world problems in a probabilistic framework

Rafał M. Wojakowski

r.wojakowski@surrey.ac.uk

University of Surrey, Wielka Brytania

About 120 years elapsed since Louis Bachelier, PhD student of Henri Poincaré, attempted to characterize financial options [1], 46 years since the publication of the famous Black-Scholes-Merton pricing model [2] [3] and 22 years since authors were awarded the Nobel prize. I will start with these and other key achievements of Mathematics in Finance. I will tell you about mathematicians in my close family and my journey from mathematical physics to finance and then focus on my contributions: symmetries in Asian options [4], real and flow options [5], the theory of corporate hedging [6], continuous workouts and installments in mortgages [7] [8], and the Loan Valuation Adjustment (LVA): a tool to make collateralized debt more secure [9].

References

[1] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **17**: 21–86 (1900).

[2] F. Black and M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Political Econ **81**: 637–654 (1973).

[3] R. Merton, *The theory of rational option pricing*, *Bell J. Econ* **4**: 141–183 (1973).

[4] V. Henderson and R. Wojakowski, *On the equivalence*

of floating- and fixed-strike Asian options, J. Appl. Probab. **39**: 391–394 (2002).

[5] M. Shackleton and R. Wojakowski, *Finite maturity caps and floors on continuous flows*, J. Econ. Dyn. Control **31**: 3843–3859 (2007).

[6] R. Wojakowski, *How should firms selectively hedge? Resolving the selective hedging puzzle*,J. Corp. Finance **18**: 560–569 (2012).

[7] R. Shiller, R. Wojakowski, M.S. Ebrahim and M. Shackleton, *Mitigating financial fragility with Continuous Workout Mortgages*, J. Econ. Behav. Organ. **85**: 269–285 (2013).

[8] G. Marcato, L.M.M. Tong and R. Wojakowski, *Modelling interactive mortgage termination strategies: Installment option valuation approach*, working paper: Reading, Shanghai and Surrey (2019).

[9] R. Wojakowski, M.S. Ebrahim, A. Jaafar and M. Osman Salleh, *Can Loan Valuation Adjustment (LVA) approach immunize collateralized debt from defaults?*, Financ. Market Inst. Instrum. **28**: 141–158 (2019).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Prawie pewne własności centralnych statystyk porządkowych

Aneta Augustynowicz
a.augustynowicz@mini.pw.edu.pl
Politechnika Warszawska

Niech $(X_n, n \geqslant 1)$ będzie ciągiem zmiennych losowych z rozkładu o dystrybuancie F oraz niech $X_{1:n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n:n}$ oznaczają statystyki porządkowe odpowiające próbie $(X_1, \ldots, X_n)$. Wtedy $(X_{k_n:n}, n \geqslant 1)$ nazwiemy
ciągiem centralnych statystyk porządkowych jeśli

$$\text{dla wszystkich } n,\ 1 \leqslant k_n \leqslant n \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} k_n/n = \lambda \in (0,1). \tag{1}$$

Będziemy badać zachowanie asymptotyczne tak zdefiniowanego ciągu. W literaturze można znaleźc analogiczne wyniki dla przypadku gdy $(X_n, n \geqslant 1)$ jest ciągiem zmiennych losowych o indentycznym rozkładzie (iid) bądź ciągiem ściśle stacjonarnych i ergodycznym. Podanie ogólniejszego twierdzenia będzie wymagalo od nas wykorzystania pojęcia warunkowego kwantyla i zdefiniowania jego nowych własności.

Bibliografia

[1] A. Augustynowicz, *Almost sure asymptotic properties of central orderstatistics from stationary processes*, in press.

[2] A. Dembińska, *Asymptotic behaviour of central order statistics from stationary processes*, Stoch Process Appl **124**: 348–372 (2014).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Dokładne prawa wielkich liczb i ich zastosowania

Paweł Kurasiński
pawelkurasinski1@gmail.com
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

W prezentacji będziemy rozważać dokładne prawa wielkich liczb, czyli zbieżność prawie pewną do pewnej niezerowej i skończonej stałej, ważonych sum niezależnych zmiennych losowych o nieskończonej wartości oczekiwanej. W pierwszej części referatu zostaną przedstawione prawa wielkich liczb dla pól losowych. W dalszej części zajmować będziemy się zbieżnością ilorazów zmiennych losowych, a w szczególności ilorazów statystyk porządkowych. Zwrócimy również uwagę na konieczność badania dokładnych praw wielkich liczb dla zmiennych losowych o różnych rozkładach.

Bibliografia

[1] A. Adler, *Exact strong laws*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica (2000), 141 –166.

[2] A. Adler, *Exact strong laws for multidimensionally indexed random variables*, J. Multivariate Anal. 77 (2001), 73–83.

[3] A. Adler, *Laws of large numbers for ratios of uniform random variables*, Open Math. 13, (2015) 571–576.

[4] A. Adler, *Strong laws for ratios of order statistics from exponentials*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 10(1), (2015), 101–111.

[5] A. Adler, *Strong laws for the largest ratio od adjacent*

order statistics, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 12(4), 315-323.

[6] A. Adler, P. Matuła, *On exact strong laws of large numbers under general dependence conditions*, Probab. Math. Statist. 38 (2018), 103–121.

[7] Y. Miao, Y. Sun, R. Wang, and M. Dong, *Various limit theorems for ratios from the uniform distribution*, Open Math. (2016), 393–403.

[8] Y. Miao, R. Wang, and A. Adler, *Limit theorems for order statistics from exponentials*, Statist. Probab. Lett. 110, (2016), 51-57.

[9] R.T. Smythe, *Strong laws of large numbers for r-dimensional arrays of random variables*, Ann. Probab. 1 (1973),164–170.

[10] Y. Zhang, X. Ding, *Limit properties for ratios of order statistics from exponentials*, J. Inequal. Appl. 11 (2017), 1–8.

[11] P. Kurasinski, P. Matuła, A. Adler, *Exact strong laws of large numbers for independent random fields*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, Vol. 66, No. 2 (2018), 179–188.

[12] P. Matuła, A. Adler, P. Kurasinski, *On exact strong laws of large numbers for ratios of random variables and their applications*, Communications in Statistics Theory and Methods, przyjęty do druku

[13] P. Matuła, P. Kurasiński, A. Adler, *Exact strong laws of large numbers for ratios of the smallest order statistics*, Statistics and Probability Letters – przyjęty do druku.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Kanoniczne procesy Bernoulliego

Rafał Martynek
r.martynek@mimuw.edu.pl
Uniwersytet Warszawski

Niech $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych Bernoulliego t.j. $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Rozważmy dowolny zbiór $T \subset \mathbb{R}^n$. Dla elementu $t = (t_i)_{i=1}^n$ zbioru T definiujemy zmienną losową

$$B_t = \sum_{i=1}^{n} t_i \varepsilon_i.$$

Rodzinę $(B_t)_{t \in T}$ nazywamy *kanonicznym procesem Bernoulliego*. W jednej z prac M. Talagrand umotywował badanie supremum takiego procesu faktem, że ciąg znaków losowych jest jednym z najstarszych i najbardziej fundamentalnych obiektóów teorii prawdopodobieństwa. Oczywiście istnieją konkretniejsze powody, dla których charakteryzacja supremum procesu Bernoulliego jest istotna, przykładem mogą być oszacowania dla procesów nieskończenie podzielnych. W referacie przedstawię najnowsze wyniki dotyczące procesów Bernoulliego bazujących w głównej mierze na kluczowej pracy W. Bednorza i R. Latały.

Bibliografia

[1] W. Bednorz, R. Latała, On the boundedness of Bernoulli processes, Ann. of Math. **180** (2014), 1167–1203.

[2] W. Bednorz, R. Martynek, *On a contraction property of Bernoulli canonical processes*, Bull. of Pol. Acad. Sci. (2019) (przyjęta).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Warunki niezależności i stałości momentów, które charakteryzują rozkład Gamma/Wisharta i rozkład Kummera

Agnieszka Piliszek
a.piliszek@mini.pw.edu.pl
Politechnika Warszawska

W [1] postawiono hipotezę, że przekształcenie

$$(x,\ y) \to \left(\frac{y}{1+x},\ x\left(1 + \frac{y}{1+x}\right)\right) \tag{2}$$

zachowuje niezależność zmiennych losowych tylko, gdy są one z konkretnych rodzin rozkładów. Hipoteza ta okazuję się być prawdziwa.
Przedstawię twierdzenie charakteryzujące wektor losowy $(X,\ Y)$ o rozkładzie Gamma$\otimes$Kummer przez zadanie niezależności składowych tego wektora przekształconego zgodnie z (2). Następnie, pokażę jak można tę charakteryzację rozszerzyć na wektory dowolnego wymiaru, a także na macierze losowe. Postaram się ponadto zaprezentować potencjalne możliwości zastosowania tych wyników.

Bibliografia

[1] M.Hamza and P. Vallois, *On Kummer's distributions of type two and generalized beta distributions*, Statist. Probab. Lett., 118:60–69 (2016).

[2] A. Piliszek and J. Wesołowski, *Kummer and gamma laws through independences on trees – another parallel with the Matsumoto–Yor property*, J. Multivar. Anal., 152:15–27 (2016).

[3] A. Piliszek and J. Wesołowski, *Change of measure technique in characterizations of the gamma and Kummer distributions*, J. Math. Anal. Appl., 458(2):967–979 (2018).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji