



metody topologiczne równań różniczkowych

patroni sesji: Tadeusz Ważewski



Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich
w stulecie

Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Kraków 3 -7 września 2019

Spis treści

Metody topologiczne równań różniczkowych 4

■ 5 Maciej Capiński

Geometryczny dowód dyfuzji Arnolda, z zastosowaniem w problemie trzech ciał

■ 6 Jacek Cyranka, Konstantin Mischaikow

Contractibility of a persistence map preimage

■ 7 Paweł Dłotko

Topologia, dynamika i nauka o danych

■ 8 Tomasz Dłotko

Równania z krytyczną nieliniowością

■ 10 Anna Gierzkiewicz, Piotr Zgliczyński

Dynamika symboliczna w modelu rotacji Hyperiona

■ 11 Mateusz Juda

Klasyfikacja próbkowanych pól wektorowych

■ 13 Michał Lipiński

Wielowartościowa dynamika kombinatoryczna dla skończonych przestrzeni topologicznych

■ 15 Małgorzata Moczurad, Piotr Zgliczyński

Konfiguracje centralne dla płaskiego problemu n -ciał dla $n = 5, 6, 7$ z równymi masami

■ 16 Konstatin Mischaikow

An approach to solving $dx/dt = ?$

■ 17 Paweł Pilarczyk

Automatyczna klasyfikacja układów dynamicznych w oparciu o rozkład Morse'a

■ 19 Mateusz Przybylski, Marian Mrozek

Kategoria Szymczaka dla FSET i FREL

■ 21 Robert Szczelina

Ścisłe całkowanie równań różniczkowych z opóźnieniem

■ 23 Daniel Wilczak

Metoda relacji nakrywających na zwartych ANR-ach

Śledzenie nietranswersalnych połączeń heteroklinicznych

Geometryczny dowód dyfuzji Arnoldda, z zastosowaniem w problemie trzech ciał

Maciej Capiński

maciej.capinski@agh.edu.pl

Akademia Górniczo-Hutnicza

Zajmiemy się problemem, w którym perturbujemy autonomiczne równanie różniczkowe posiadające zasadę zachowania energii. Pytaniem jest czy pod wpływem dowolnie małej perturbacji istnieją orbity, dla których zaobserwujemy zmianę energii o zadanej wielkości, która jest niezależna od rozmiaru perturbacji. Przedstawimy geometryczny mechanizm dowodzenia tego typu zjawisk. Dzięki niemu można dowodzić również chaotyczne własności zmian poziomów energii. Jako zastosowanie rozpatrzmy ograniczony problem trzech ciał dla układu Neptun-Tryton.

Bibliografia

- [1] M. J. Capiński, M. Gidea, *Arnold Diffusion, Quantitative Estimates and Stochastic Behavior in the Three-Body Problem*,

<https://arxiv.org/abs/1812.03665>

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Contractibility of a persistence map preimage

Jacek Cyranka

jcyranka@gmail.com

Uniwersytet Warszawski

This work is motivated by the following question in data-driven study of dynamical systems: given a dynamical system that is observed via time series of persistence diagrams that encode topological features of solutions snapshots, what conclusions can be drawn about solutions of the original dynamical system? In this paper we provide a definition of a persistence diagram for a point in \mathbb{R}^N modeled on piecewise monotone functions. We then provide conditions under which time series of persistence diagrams can be used to guarantee the existence of a fixed point of the flow on \mathbb{R}^N that generates the time series. To obtain this result requires an understanding of the preimage of the persistence map. The main theorem of this paper gives conditions under which these preimages are contractible simplicial complexes.

References

- [1] Cyranka, Jacek and Mischaikow, Konstantin *Contractibility of a persistence map preimage*, arXiv e-prints 2018, arXiv:1810.12447

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Topologia, dynamika i nauka o danych

Paweł Dłotko

p.t.dlotko@swansea.ac.uk

Swansea University, Wielka Brytania

Topologia, dynamika i nauka o danych są ze sobą fundamentalnie związane. W tym referacie przytoczę kilka przykładów obrazujących tę zależność. Pokażę jak topologia może być użyta do zrozumienia dyskretnych i ciągłych procesów dynamicznych. Przedyskutuję również sytuację, w której skomplikowana dynamika jest znana wyłącznie z pewnej skończonej obserwacji i pokaże jak można próbować ją zrekonstruować, modelować i zrozumieć przy pomocy metod geometrii i topologii.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Równania z krytyczną nieliniowością

Tomasz Dłotko

tdlotko@math.us.edu.pl

Uniwersytet Śląski w Katowicach

Referat będzie dotyczył semiliniowych równań ewolucyjnych w przestrzeni Banacha X , które mogą być zapisane w postaci

$$\begin{aligned}u_t + Au &= F(u), & t > 0, \\u(0) &= u_0,\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie A oznacza operator sektorialny (najczęściej zadawany przez liniowy operator eliptyczny), zaś F nieliniowość „podporządkowaną” w odpowiednim sensie operatorowi A .

Na wstępie przedstawię rys historyczny uwzględniający w szczególności postęp osiągnięty w latach osiemdziesiątych XX wieku, głównie w USA. Omówię kwestie istnienia i jednoznaczności rozwiązań (1) w półgrupowym podejściu monografii [1]. Podam dalej przykłady równań fizyki matematycznej przedstawialnych w postaci (1). Na koniec opowiem o równaniach w których wyraz nieliniowy F jest ‘porównywalny’ z operatorem A ; w szczególności o wywodzących się z hydrodynamiki równaniach Naviera–Stokesa oraz Quasi-geostrophic w wymiarze 2. Uogólnieniom tych równań, w których operator różniczkowy zastąpiono potęgą ułamkową operatora $-\Delta$, poświęcono w ostatnich latach wiele prac (patrz [2]).

Bibliografia

- [1] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

- [2] Tomasz W. Dłotko and Yejuan Wang, *Critical Parabolic-Type Problems*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 2020 (in preparation).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Dynamika symboliczna w modelu rotacji Hyperiona

Anna Gierzkiewicz

anna.gierzkiewicz@urk.edu.pl

Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Współautor:

Piotr Zgliczyński

umzglicz@cyf-kr.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Zaprezentuję proste zastosowanie biblioteki CAPD [1] dla języka C++ w przeprowadzeniu komputerowo wspieranego dowodu istnienia dynamiki symbolicznej w modelu rotacji elipsoidalnego satelity na orbicie keplerowskiej. Motywacją dla badań [2] było chaotyczne koziołkowanie Hyperiona – jednego z księżyców Saturna [3].

Bibliografia

- [1] Computer Assisted Proofs in Dynamics C++ library, Instytut Informatyki i Matematyki Komputerowej Uniwersytetu Jagiellońskiego, <http://capd.ii.uj.edu.pl>.
- [2] A. Gierzkiewicz, P. Zgliczyński, *A computer-assisted proof of symbolic dynamics in Hyperion's rotation*, *Celest Mech Dyn Astr* **131**: 33 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9910-8>.
- [3] J. Wisdom, S. J. Peale, F. Mignard, *The chaotic rotation of Hyperion*, *Icarus* **58**, no. 2: 137 – 152 (1984).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Klasyfikacja próbkowanych pól wektorowych

Mateusz Juda

mateusz.juda@ii.uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Celem referatu jest przedstawienia wyników prac nad automatyczną klasyfikacją danych pochodzących z próbkowanych pól wektorowych. Źródłem tego rodzaju danych są symulacje numeryczne oraz pomiary zjawisk fizycznych. W uzyskanych wynikach istotnym czynnikiem jest brak konieczności ręcznego tworzenia modelu matematycznego obserwowanego zjawiska, a cały proces sterowany jest danymi w postaci chmury punktów i zaczepionymi w nich wektorami. Wyniki prac oparte są na połączeniu technik z dynamicznej topologii obliczeniowej [1], metod analizy grafów [2] i przetwarzania języka naturalnego [3]. W referacie omówione zostaną podstawy teoretyczne oraz wyniki uzyskane zarówno z danymi syntetycznymi, a także pochodzącymi z aparatury pomiarowej.

Bibliografia

- [1] M. Mrozek, *Conley-Morse-Forman Theory for Combinatorial Multivector Fields on Lefschetz Complexes*, Found Comput Math **17** 1585 – 1633 (2017)
- [2] B. Perozzi, R. Al-Rfou, S. Skiena, *DeepWalk: online learning of social representations*, Proceedings of the 20th ACM SIGKDD int. conf. on KDD 701 – 710, (2014)
- [3] T. Mikolov, I. Sutskever, K. Chen, G. Corrado, J. Dean,

Distributed Representations of Words and Phrases and their Compositionality, NIPS **26**: 3111 – 3119 (2013)

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Wielowartościowa dynamika kombinatoryczna dla skończonych przestrzeni topologicznych

Michał Lipiński

michal.lipinski@uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Teoria pól multiwektorowych [1] stanowi generalizację kombinatorycznych pól wektorowych Formana.

W referacie zaprezentowana zostanie uogólniona i uproszczona wersja teorii pól multiwektorowych zdefiniowanych dla skończonych przestrzeni topologicznych. Umożliwiło to zadanie pola multiwektorowego w języku porządków oraz skorzystania z twierdzenia McCorda i badania topologicznych własności poprzez homologie symplecjalne. Do nowych warunków zaadaptowane zostały takie pojęcia jak izolowany zbiór niezmienniczy, para indeksowa, indeks Conley'a, czy rozkład Morse'a.

Uproszczenie teorii przyniosło wyraźne korzyści algorytmiczne, czego przykładem są eksperymenty numeryczne dotyczące rekonstrukcji dynamiki z próbkowanego układu dynamicznego [2].

Praca przygotowana jest we współpracy z J. Kubicą, M. Mrozkiem oraz T. Wannerem.

Bibliografia

- [1] M. Mrozek, *Conley–Morse–Forman theory for combinatorial multivector fields on Lefschetz complexes*, Foundations of Computational Mathematics 17(6): 1585 – 1633 (2017).

- [2] T. Dey, M. Juda, T. Kapela, J. Kubica, M.L. and M. Mrozek, *Persistent Homology of Morse Decompositions in Combinatorial Dynamics*, SIAM J. on Appl. Dyn. Sys. 18(1): 510 – 530 (2019).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Konfiguracje centralne dla płaskiego problemu n -ciał dla $n = 5, 6, 7$ z równymi masami

Małgorzata Moczurad

malgorzata.moczurad@ii.uj.edu.pl

Uniwersytet Jagiellonski

Przedstawię komputerowo wspierany dowód kompletnej listy konfiguracji centralnych dla płaskiego problemu n -ciał z potencjałem Newtona dla $n = 5, 6, 7$ z równymi masami. Dowodzę, że wszystkie te konfiguracje centralne mają symetrie odbicia względem pewnej prostej. Dla $n = 8, 9, 10$ dowodzimy, że istnieją konfiguracje centralne dla równych mas bez żadnej symetrii odbicia.

Bibliografia

- [1] Małgorzata Moczurad and Piotr Zgliczyński, *Central configurations in planar n -body problem for $n = 5, 6, 7$ with equal masses*, arXiv:1812.07279

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

An approach to solving $dx/dt = ?$

Konstatin Mischaikow

`mischaik@math.rutgers.edu`

Rutgers University

The life sciences provide archetypical examples of nonlinear systems for which an accurate understanding dynamics is essential, but for which models derived from first principles are not available. This implies that an analytic expression of the nonlinearity is typically derived base on heuristics or simplicity of evaluation. As a consequence parameters do not have an intrinsic physical basis. Furthermore experimental measurements of variables and adopted parameters tend to be quantified on log scales. This is not a setting for which the classical theory of dynamical systems was designed to address. With these challenges in mind I will outline an approach to dynamics based on order theory and algebraic topology that allows us to consider large classes of differential equations over large regions of parameter space and derive rigorous results. I will use gene regulatory networks to provide a concrete example of how this approach can be applied.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Automatyczna klasyfikacja układów dynamicznych w oparciu o rozkład Morse'a

Paweł Pilarczyk

pawel.pilarczyk@pg.edu.pl

Politechnika Gdańska

Przedstawię zautomatyzowaną metodę numeryczno-topologicznej analizy układów dynamicznych, która została po raz pierwszy zaprezentowana w [1]. Jest to metoda algorytmiczna zaprogramowana w C++, która wykorzystuje m.in. arytmetykę przedziałową, algorytmy na grafach oraz obliczeniową topologię algebraiczną. Celem tej metody jest sklasyfikowanie dynamiki na z góry zadany zbiór, jeśli chodzi o izolowane podzbiory niezmiennicze (rozkład Morse'a). Daje ona wyniki ścisłe matematycznie, w przeciwieństwie do popularnych symulacji numerycznych. Była ona stosowana m.in. do analizy pewnych modeli populacji, w fizyce teoretycznej oraz w epidemiologii; zob. np. [2]. Na przykładzie indeksu Conleya przedstawię proces dyskretyzacji, który umożliwia wykonywanie ścisłych obliczeń algorytmicznych na ciągłych obiektach topologicznych.

Bibliografia

- [1] Z. Arai, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow, H. Oka, P. Pilarczyk, *A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **8**: 757 – 789 (2009).
DOI: 10.1137/080734935.
- [2] D.H. Knipl, P. Pilarczyk, G. Rost, *Rich bifurcation struc-*

ture in a two-patch vaccination model, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **14**: 980 – 1017 (2015).
DOI: 10.1137/140993934.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Kategoria Szymczaka dla FSET i FREL

Mateusz Przybylski

mateusz.przybylski@im.uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Szymczak w [1] sformułował w języku teorii kategorii najbardziej ogólne warunki, jakie muszą być spełnione aby definicja indeksu Conleya dla dyskretnych układów dynamicznych była poprawna. Główna idea polega na zastosowaniu funktora, który mapuje pewne morfizmy na izomorfizmy. Taki funktor jest nazywany funktorem normalnym. Okazuje się, że każdy funktor normalny faktoryzuje przez tzw. funktor Szymczaka, którego obrazem jest pewna pomocnicza kategoria, nazywana tutaj kategorią Szymczaka.

W ramach referatu przedstawię konstrukcję funktora i kategorii Szymczaka (SZYM) oraz wyniki opisujące klasy obiektów izomorficznych w kategorii Szymczaka: dla kategorii zbiorów skończonych i odwzorowań jako morfizmów (FSET) oraz dla kategorii zbiorów skończonych i relacji binarnych jako morfizmów (FREL).

Zrozumienie struktury SZYM(FREL) powinno umożliwić klasyfikację obiektów kategorii SZYM(LREL), gdzie LREL jest kategorią przestrzeni liniowych i relacji liniowych. Takie uogólnienie jest potrzebne w celu konstrukcji indeksu Conleya dla wielowartościowych układów dynamicznych, których generatory mogą nie mieć acyklicznych wartości. Referat na podstawie wstępnych wyników aktualnie realizowanego projektu z M. Mrozkiem.

Bibliografia

- [1] A. Szymczak, *The Conley Index for Discrete Semidynamical Systems*, *Topology and its Applications* **66**: 215 – 240, (1995).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Ściste całkowanie równań różniczkowych z opóźnieniem

Robert Szczelina

robert.szczelina@uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Rozważmy następujący problem:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t - \tau), x(t)), & t \geq 0, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-\tau, 0], \psi \in C^0. \end{cases} \quad (2)$$

Równanie (2) może generować skomplikowaną dynamikę, jak ma to miejsce np. w równaniu Mackey'a-Glass'a, dla którego symulacje numeryczne wskazują na istnienie serii bifurkacji podwojenia okresu prowadzących do chaosu [1]. Obecnie wydaje się niemożliwe, poza pewnymi szczególnymi przypadkami, udowodnienie tego typu zachowania metodami analitycznymi, jednak metody dowodzenia wspierane komputerowo mogą okazać się skuteczne.

W pracy [2] autorzy prezentują algorytm ścisłego całkowania trajektorii układu (2) w przód w czasie. Podczas prezentacji omówione zostaną pewne usprawnienia wspomnianej metody oraz jej zastosowanie do komputerowo wspieranego dowodu istnienia orbit stabilnych i niestabilnych w równaniu Mackey'a-Glass'a z wykorzystaniem narzędzi topologicznych (stopień Leray'a-Schaudera).

Bibliografia

- [1] M. C. Mackey and L. Glass. *Science*, **197**(4300):287 – 289, (1977).

- [2] R. Szczelina and P. Zgliczyński. *Found. Comput. Math.*, **18**(6):1299 – 1332, (2018).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Metoda relacji nakrywających na zwartych ANR-ach

Daniel Wilczak

wilczak@ii.uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Metoda relacji nakrywających [1,2] okazała się bardzo skutecznym narzędziem w jakościowej analizie układów dynamicznych, między innymi przy dowodzeniu istnienia dynamiki symbolicznej, czy też orbit łączących. W niniejszym referacie pokażę, że można jej stosowalność rozszerzyć na zwarte ANR-y.

Motywacją do takiego uogólnienia tej metody było jej zastosowanie do badania dynamiki dysypatywnych równań cząstkowych. Pokazaliśmy istnienie dynamiki symbolicznej w jednowymiarowym równaniu Kuramoto-Sivashinskiego

$$u_t = -\nu u_{xxxx} - u_{xx} + (u^2)_x,$$

dla $\nu = 0.1212$ i z okresowymi i nieparzystymi warunkami brzegowymi. Prezentowane wyniki pochodzą z wspólnej pracy z Piotrem Zgliczyńskim [3].

Bibliografia

- [1] P. Zgliczyński, *Computer assisted proof of chaos in the Rössler equations and the Hénon map*, Nonlinearity **10** (1997), 243-252.
- [2] P. Zgliczyński, M. Gidea, *Covering relations for multidimensional dynamical systems*, J. Diff. Eq., 202/1(2004), 33 – 58.

- [3] D. Wilczak, P. Zgliczyński, *A geometric method for infinite-dimensional chaos: symbolic dynamics for the Kuramoto-Sivashinsky PDE on the line*, w recenzji.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Śledzenie nietranswersalnych połączeń heteroklinicznych

Piotr Zgliczyński

umzglicz@cyf-kr.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Omówimy wynik dotyczący śledzenia łańcucha nietranswersalnych połączeń heteroklinicznych opartego na idei odrzucania żużytych kierunków". Ten mechanizm zilustrujemy na przykładzie modelu wprowadzonego przez Colliander *et al.* w kontekście nieliniowego równania Schrödingera na 2-wymiarowym torusie z rozpraszającym członem trzeciego stopnia.

Bibliografia

- [1] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation*, *Invent. math.* (2010) 181:39–113
- [2] A. Simon, A. Delshams, P. Zgliczyński, *Shadowing of non-transversal heteroclinic chains*, *J. Diff. Eq.* 264(2018), 3619–3663

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)