Zadania olimpijskie niezwykłej urody – sesja specjalna

Czwartek, 5 września 2019, sala 1016

14:30–14:45 Małgorzata Terepeta, Danuta Ciesielska
Stefan Straszewicz – twórca Olimpiady Matematycznej w Polsce

Stefan Straszewicz (1889 – 1983), doktor matematyki Uniwersytetu w Zurychu (1914, Zermelo), profesor matematyki Politechniki Warszawskiej (1928), członek honorowy PTM (1968), pierwszy laureat Nagrody PTM im. S. Dicksteina (1979), pierwszy przewodniczący Komitetu Głównego OM (1949 – 1969). W referacie zostaną podane ważne informacje biograficzne oraz przedstawiona rola Straszewicza jako twórcy i wieloletniego organizatora OM.

14:45 – 15:00 Ryszard Rudnicki

Dowieść, że jeżeli w wielościan wypukły można wpisać kulę i każdą ścianę tego wielościanu można pomalować na jeden z dwóch kolorów tak, że każde dwie ściany mające wspólną krawędź są różnych kolorów, to suma pól ścian jednego koloru jest równa sumie pól ścian drugiego koloru.

15:00 – 15:15 Michał Wojciechowski

Baron Münchhausen twierdzi, że w jego magicznym lesie rosną sosny i brzozy. W odległości równo 10 metrów od każdej sosny rośnie 8 brzóz. W lesie jest więcej sosen niż brzóz. Czy baron Münchhausen może mówić prawdę?

15:15 – 15:30 Edward Tutaj

Ciąg $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ dany jest wzorem rekurencyjnym $x_{n+3} = x_n + x_{n+1} \cdot x_{n+2}$ oraz warunkami początkowymi: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Wykazać, że w tym ciągu występuje wielokrotność każdej liczby naturalnej.

15:30 – 15:45 Barbara Roszkowska-Lech

Niech a i b będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że liczba a^2+b^2 jest podzielna przez $ab+1$. Udowodnić, że $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

15:45 – 16:00 Jakub Węgrecki

Każdą dodatnią liczbę całkowitą pomalowano na jeden z k kolorów. Wykazać, że istnieją cztery parami różne dodatnie liczby całkowite a, b, c, d jednego koloru, spełniające następujące warunki:

$$ad = bc, \quad \frac{c}{a} = 2019^n, \quad \frac{b}{a} = 2020^m$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych m, n.

16:00 – 16:30 PRZERWA KAWOWA

16:30 – 17:00 Michał Krych
wykład laureata Nagrody Głównej PTM im. S. Dicksteina

Udowodnić, że jeśli liczby całkowite a, b spełniają równanie $2a^2 + a = 3b^2 + b$, to liczby $a - b$ i $2a + 2b + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Na krawędziach czworościanu $A_1A_2A_3A_4$ wybrano sześć punktów, po jednym na każdej krawędzi. Przez każdy wierzchołek czworościanu i te trzy punkty z obranych punktów, które leżą na krawędziach z niego wychodzących, poprowadzono sferę. Dowieść, że cztery tak powstałe sfery mają punkt wspólny.

17:00 – 17:15 Bartłomiej Bzdęga

W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą następujące równości:

$$|AB| = |BC| = |CD|, \quad |AE| = |EB| = |BD|, \quad |AC| = |CE| = |ED|.$$

Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.

17:15 – 17:30 Dominik Burek

Liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają nierówności

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2a_1.$$

Udowodnić, że jeśli m jest liczbą różnych dzielników pierwszych iloczynu $a_1a_2 \ldots a_n$, to

$$(a_1a_2 \ldots a_n)^{m-1} \geq (n!)^m.$$

17:30 – 17:45 Andrzej Grzesik

Wyznaczyć największą liczbę prostych w przestrzeni, przechodzących przez ustalony punkt i takich, że każde dwie przecinają się pod jednakowym kątem.

17:45 – 18:00 Grzegorz Świątek

Wewnątrz obszaru w płaszczyźnie ograniczonego przez dodatnią część osi odciętych i parabolę, tj. $\{(x, y) : 0 < x, 0 < y < x^2\}$ porusza się swobodnie punkt materialny, odbijając się od brzegu według zasady, że kąt padania na styczną w punkcie odbicia jest równy kątowi odbicia. Wykazać, że bez względu na początkowy kierunek i położenie punkt odbije się tylko skończenie wiele razy.