Hipotezy Seiferta

Krystyna Kuperberg
Auburn University, Alabama, USA
e-mail: kuperkm@auburn.edu

Znane od dawna twierdzenie o zaczesaniu kuli mówi, że żadna sfera o wymiarze parzystym nie dopuszcza stycznego do niej ciągłego pola wektorowego bez wektorów zerowych. Sfery o nieparzystym wymiarze, dzięki ich zerowej charakterystyce Eulera, dopuszczają takie pola wektorowe. W roku 1950 H. Seifert udowodnił, że małe zaburzenie pola wektorowego bez wektorów zerowych, równoległego do rozwłóknienia Hopfa, musi posiadać zamkniętą trajektorię. Hipoteza o istnieniu zamkniętej trajektorii dla wszystkich takich pól wektorowych na sferze trójwymiarowej przyjęła nazwę Hipotezy Seiferta. W roku 1966 F. W. Wilson obalił analogiczną hipotezę dla sfer o nieparzystym wymiarze od piątego wzwyż.

Przypadek wymiaru trzeciego przez dłuższy czas był nierozstrzygnięty. W roku 1974 P. A. Schweitzer znalazł piękny kontrprzykład do Hipotezy Seiferta klasy C^1. W roku 1993 H. Hofer udowodnił hipotezę w przypadku rozmaitości kontaktowych. Wkrótce potem skonstruowany został (przez prelengentkę) kontrprzykład nieskończenie różniczkowalny. W rezultacie, dzięki pracy G. Kuperberga ukazały się kontrprzykłady w dwóch bardzo ważnych kategoriach: analitycznych oraz kawałkami liniowych. W roku 1996 G. Kuperberg podał również kontrprzykład w wymiarze trzecim zachowujący objętość. W roku 2003 V. Ginzburg i B. Gürel skonstruowali potok Hamiltona bez zamkniętych orbit.

W tym wykładzie zostanie przedstawiona historia rozwiązań Hipotezy Seiferta oraz Zmodyfikowanej Hipotezy Seiferta. Dzięki pracom E. Ghysa, Sh. Matsumoto, S. Hurdera, A. Rechtman i innych, pewne ważne właściwości algebraiczne i ergodyczne można opisać dla dużej klasy kontrprzykładów.

The Seifert Conjectures

Under the name of the "hairy-ball" theorem, it has been known for a long time that spheres of even dimension do not admit a continuous tangent vector field without singularities. Spheres of odd dimension, having the Euler characteristic zero, admit such vector fields. In 1950, H. Seifert proved that a perturbation of a non-zero vector field parallel to the Hopf fibration must posses a closed trajectory. The conjecture of the existence of a closed trajectory for all non-singular vector fields on the three-dimensional sphere became known as the Seifert Conjecture. In 1966, F. W. Wilson disproved the conjecture for spheres of odd dimension starting with dimension five.

The case of dimension three for all closed manifolds resisted solution for a while. In 1974, P. A. Schweitzer found a beautiful C^1 counterexample to the Seifert Conjecture. In 1993, H. Hofer proved the conjecture for contact flows. Soon after, the speaker constructed a smooth counterexample. Consequently, thanks to the work of G. Kuperberg, counterexamples in two very important categories, real analytic and piece-wise linear, became known. In 1996, G. Kuperberg also gave a volume-preserving counterexample in dimension three. In 2003, V. Ginzburg and B. Gürel constructed a Hamiltonian flow without closed orbits.

In this lecture, the history of solutions to the Seifert Conjecture and the Modified Seifert Conjecture will be presented. Thanks to the work of E. Ghys, Sh. Matsumoto, S. Hurder, A. Rechtman, and others, certain important algebraic and ergodic properties can be summarized for a large class of the counterexamples.

References

[1] V. L. Ginzburg and B. Z. Gürel, *C^2-smooth counterexample to the Hamiltonian Seifert conjecture in $\mathbb{R}^4$*, Ann. of Math. 158 (2003), 953–976.

[2] H. Hofer, *Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math. 114 (1993), 515–563.

[3] S. Hurder and A. Rechtman, *The dynamics of generic Kuperberg flows*, Astérisque 377 (2016), 1–250.

[4] G. Kuperberg, *A volume-preserving counterexample to the Seifert conjecture*, Comment. Math. Helvetici 71 (1996), 70–97.

[5] K. Kuperberg, *A smooth counterexample to the Seifert conjecture*, Ann. of Math., 140 (1994), 723–732.

[6] K. Kuperberg and G. Kuperberg, *Generalized counterexamples to the Seifert conjecture*, Ann. Math.144 (1996), 239–268.

[7] P. A. Schweitzer, *Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations*, Ann. Math. 100 (1974), 386–400.

[8] H. Seifert, *Closed integral curves in 3-space and two-dimensional deformations*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 287–302.

[9] F. W. Wilson, *On the minimal sets of non-singular vector fields*, Ann. Math. 84 (1966), 529–536.