KSIĘGA PAMIĄTKOWA PIERWSZEGO POLSKIEGO ZJAZDU MATEMATYCZNEGO

LWÓW, 7—10. IX. 1927

DODATEK
DO „ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE"

WYDANO Z ZASIŁKU FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ

KRAKÓW
CZCIONKAMI DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM JÓZEFA FILIPOWSKIEGO
1929

Spis treści

Dział III. Analiza i algebra

Dział IV – Geometrja

Dział V. Mechanika, Fizyka matematyczna, Matematyka stosowana

Dział VI. Dydaktyka matematyki

Władze Zjazdu

Komitet Honorowy

Banachiewicz Tadeusz
Bartel Kazimierz
Dickstein Samuel
Huber Maksymiljan
Krygowski Zdzisław
Lichtenstein Leon
Łukasiewicz Jan
Natanson Władysław
Sierpiński Wacław
Staniewicz Wiktor
Zaremba Stanisław
Żórawski Kazimierz

Prezydjum Zjazdu

Wacław Sierpiński, prezes, Tadeusz Banachiewicz, Leon Lichtenstein, Stefan Mazurkiewicz, wiceprezesi, Kazimierz Kuratowski, sekretarz.

Komitet Organizacyjny

Prezes: Maksymiljan Huber
Zastępca prezesa: Hugo Steinhaus
Referent mieszkaniowy: Włodzimierz Stożek
Referent programowy: Stefan Banach
Referent skarbowy: Antoni Łomnicki
Sekretarz: Władysław Nikliborc.

Przewodniczący Sekcyj

A. Sekcja logiki matematycznej i podstaw matematyki: Chwistek, Łukasiewicz, Tarski.
B. Sekcja algebry i teorji liczb: Biernacki, Staniewicz, Żyliński.
C. Sekcja teorji mnogości i funkcji zmiennej rzeczywistej: Banach, Kuratowski, Ruziewicz, Saks.
D. Sekcja analizy: Leja, Lichtenstein, Nikliborc.
E. Sekcja geometrji: Garlicki, Hoborski, Ślebodziński.
F. Sekcja matematyki stosowanej: Spława-Neyman, Steinhaus.
G. i H. Sekcje mechaniki, fizyki matematycznej i astronomji: Banachiewicz, Blumenfeld, Grabowski, Rosenblatt.
I. Sekcja dydaktyki, historji i filozofji matematyki: Dickstein, Łomnicki, Pająk.

Komisja Wniosków

Przewodniczący: W. Sierpiński.
Członkowie: T. Banachiewicz, M. Huber, A. Łomnicki, S. Ruziewicz, H. Steinhaus, W. Stożek.

Komitet Redakcyjny Księgi Zjazdu

Redaktorowie: Stefan Banach i Kazimierz Kuratowski.
Sekretarz: Stefan Kaczmarz.

Lista uczestników Zjazdu

Abramowicz Kazimierz dr. zastępca prof. uniw. Poznań.
Abramowiczówna Izabela prof. gim. Poznań.
Andersen Aksel Frederik dr. docent uniw. Kopenhaga.
Aulich Witold inż. dr. asystent politechniki, Lwów.
Babski Bohdan prof. gim. Królewska Huta.
Bałtowski Franciszek prof. gim. Łańcut.
Banach Stefan dr. prof. uniw. Lwów.
Barchanowska Helena prof. gim. Gostynin.
Baran Jan prof. gim. Toruń.
Bary Nina dr. Moskwa.
Biegański Edward dyr. gim. Łowicz.
Biernacki Mieczysław dr. Paryż.
Bilińska Helena prof. sem. Lwów.
Birgfellner Jan dyr. gim. Gniezno.
Birnbaum Zygmunt mag. praw, prof. gim. Lwów.
Blumenfeld Izydor inż. dr. Lwów.
Borkowska Janina prof. gim. Warszawa.
Böttcher Łucjan dr. docent polit. Lwów.
Broniec Karol prof. gim. Tarnowskie Góry.

Burdecki Karol dr. prof. gim. Wągrowiec.
Cielecki Janusz prof. gim. Warszawa.
Czajkowski Leon prof. gim. Bielsko Podlaskie.
Dickstein Samuel dr. prof. uniw. Warszawa.
Dziwiński Placyd dr. prof, polit. Lwów.
Ernst Marcin dr. prof. uniw. Lwów.
Frycz Kazimierz dr. prof. gim. Lublin.
Freilich Arnold dr. prof. gim. Lwów.
Fuchs Zygmunt inż. dr. adjunkt polit. Lwów.
Garlicki Stanisław inż. prof. polit. Warszawa.
Glass Stefan dr. asystent uniw. Wilno.
Golczewski Kajetan prof. gim. Lwów.
Greniewski Henryk dr. Warszawa.
Grużewski Aleksander dr. asystent polit. Warszawa.
Grycz Karol prof. gim. Cieszyn.
Halfter Piotr prof. gim. Grodno.
Helman Wiktor prof. gim. Lubliu.
Herstalówna Wanda prof. gim. Kraków.
Hlavatÿ Wacław dr. docent uniw. i polit. Praga.
Hoborski Antoni dr. prof. uniw. i Akad. Gór. Kraków.
Homme Marja prof. gim. Lwów.
Huber Maksymiljan inż. dr. prof. polit. Lwów.
Hurewicz Witold dr. asystent uniw. Amsterdam.
Ignatowicz Bolesław prof. gim. Warszawa.
Iwanowski Arkadjusz kand. nauk. mat. Łomża.
Izdebski Stanisław dyr. gim. Otwock.
Jacob Mojżesz dr. technik ubezp. Wiedeń.

Jamrógiewicz Roman dr. prof. gim. Lwów.
Jankowski Ksawery kand. nauk mat. major W. P. Warszawa.
Jaśkowski Stanisław Warszawa.
Kaczmarz Stefan dr. asystent polit. Lwów.
Kaczyński Stanisław prof. gim. Płock.
Kamionkówna Marja prof. sem. Radom.
Karczewski Janusz prof. gim. Wejherowo.
Kempisty Stefan dr. prof. uniw. Wilno.
Kerner Michał Warszawa.
Knaster Bronisław dr. docent uniw. Warszawa.
Kolanowski Włodzimierz inż. asystent polit. Warszawa.
Kolczyński Stefan prof. gim. Gniezno.
Koim Jan prof. gim. Lwów.
Koperny Józef prof. gim. Pleszew.
Kosiński Konstanty prof. gim. Białystok.
Koźniewski Andrzej Warszawa.
Krassowski Zenon prof. gim. Białystok.
Krupicka Anna prof. gim. Kraków.
Kuczkowska Stefanja prof. gim. Białystok.
Kuczkowski Jan prof. gim. Białystok.
Kunicki Władysław dyr. gim. Lublin.
Kuratowski Kazimierz dr. prof, polit. Lwów.
Lantsch Jan prof. gim. Tarnopol.
Leja Franciszek dr. prof, polit. Warszawa.
Leśniczukówna Janina prof. sem. Zawiercie.
Lewicki Wincenty prof. sem. Lwów.
Lichtenberg Władysław prof. gim. Lwów.

Lichtenstein Leon dr. prof, uniw. Lipsk.
Lindenbaum Adolf Warszawa.
Loria Stanisław dr. prof. uniw. Lwów.
Losterówna Marja prof. gim. Ostrów Wkp.
Łobacz Józef ks. dr. teol. Kraków.
Łomnicki Antoni dr. prof, polit. Lwów.
Łomnicki Zbigniew urz. Zakł. Ubezp. Lwów.
Lukasiewicz Jan dr. prof. uniw. Warszawa.
Łuzin Mikołaj prof. uniw. Moskwa.
Madlerowa Wanda dyr. sem. Zamość.
Majewski Władysław major W. P. Toruń.
Makarewicz Józef kand. nauk mat. prof. gim. Lublin.
Maksymowicz Adam dr. docent polit, prof. gim. Lwów.
Małuszkiewicz Władysław prof. sem. Częstochowa.
Matusewicz Ludmiła kier. gim. Warszawa.
Mazur Stanisław Lwów.
Mazurkiewicz Józef dyr. gim. Bydgoszcz.
Mickiewicz Władysław prof. gim. Zamość.
Mienszow Dymitr prof. Instytutu matem. Moskwa.
Mihułowicz Jerzy dr. prof. gim. Lwów.
Milecka Helena prof. gim. Warszawa.
Myślicki Wacław prof. gim. Grodno.
v. Neumann Jan dr. docent uniw. Berlin.
Neymann-Spława Jerzy dr. Kraków.
Niedojadło Piotr prof. gim. Toruń.
Niedźwiecki Zenon prof. gim. Nieśwież.
Nikliborc Władysław dr. asystent polit. Lwów.

Nikodym Otto dr. prof. gim. Kraków.
Nikodymowa Stanisława dr. Kraków.
Ohrenstein Szymon prof. gim. Drohobycz.
Orlicz Władysław asystent uniw. Lwów.
Pająk Stanisław wizytator Lwów.
Pająkówna Jadwiga Kraków.
Paradecki Zygmunt prof. sem. Tomaszów Maz.
Perzyna Józef prof. sem. Chełm Lub.
Piekarski Bronisław Warszawa.
Piestrak Feliks inż. dyr. Szkoły górn. Tarnowskie Góry.
Pietkiewiezówna Amelja prof. gim. Częstochowa.
Piotrowski Jan inż. prof, polit. Warszawa.
Podjedówna Agnieszka dr. prof. gim. Warszawa.
Popławska Alodja prof. sem. Lublin.
Pressburger Mojżesz Warszawa.
Prokofl Józef prof. gim. Warszawa.
Rosenblatt Alfred dr. prof. uniw. Kraków.
Rosental Stefan Kraków.
Rudnicki Juljusz dr. prof. uniw. Wilno.
Rusiecki Antoni instruktor Min. W. R. i 0. P. Warszawa.
Ruziewicz Stanisław dr. prof. uniw. Lwów.
Rybarczyk Aleksander prof. sem. Białystok.
Rymaszewski Eugeniusz prof. gim. Lublin.
Saks Stanisław dr. docent uniw. Warszawa.
Schauder Joachim prof gim. Łańcut.
Schauder Juljusz dr. prof. gim. Lwów.
Schweizerówna Irena dr. prof. gim. Warszawa.

Seipeltówna Lidja dr. asyst. uniw. Poznań.
Sergescu Piotr dr. prof. uniw. Cluj.
Sierpiński Wacław dr. prof uniw. Warszawa.
Skulicz Marjan prof. gim. Sambor.
Ślebodziński Władysław prof. Szkoły Budowy Maszyn, Poznań.
Sławicka Stefanja prof. gim. Rybnik.
Sokołowski Lech Warszawa.
Sosnowski Witold Warszawa.
Staniewicz Wiktor dr. prof. uniw. Wilno.
Stasiuk Bazyli dr. prof. gim. Łańcut.
Steckel Samuel dr. prof. gim. Kielce.
Steinhaus Hugo dr. prof. uniw. Lwów.
Stempurski Karol prof. sem. Ostrowiec Kielecki.
Sternbach Ludwik Lwów.
Stożek Włodzimierz dr. prof. polit. Lwów.
Straszewicz Stefan dr. prof. polit. Warszawa.
Straszewski Feliks prof. gim. Warszawa.
Supronowicz Edward wizytator Lublin.
Świderski Stefan naczelnik Kuratorjum Toruń.
Sznejberżanka Anna Warszawa.
Sznejberżanka Irena Warszawa.
Szymkiewicz Dezydery dr. prof. polit. Lwów.
Szynkiewicz Jan prof. sem. Tuchola.
Tarski Alfred dr. docent uniw. Warszawa.
Turkowska Jadwiga prof. gim. Wilno.
Twardowski Kazimierz dr. prof. uniw. Lwów.
Warchałowski Edward inż. prof. polit. Warszawa.

Warhaftman Stanisław Warszawa.
Ważewski Tadeusz dr. asystent Akademji Górniczej Kraków.
Weigel Kasper inż. dr. prof. polit. Lwów.
Weinlösówna Sala Lwów.
Weyssenhof Jan dr. prof. uniw. Wilno.
Wierzbicki Witold inż. dr. docent polit. Warszawa.
Witkowski Władysław inż. Warszawa.
Wójcik Stanisław ks. kier. gim. Oświęcim.
Wolfke Ludomir dr. Warszawa.
Wróblewski Józef prof. gim. Lwów.
Zaleski Witold prof. gim. Lublin.
Zarankiewicz Kazimierz dr. asystent polit. Warszawa.
Zaremba Stanisław Krystyn Kraków.
Zaremba Zdzisław prof. Liceum, Krzemieniec.
Zarycki Miron prof. gim. Lwów.
Zawirski Zygmunt dr. docent polit. Lwów.
Zgórski Wacław prof. gim. Sarny.
Zygmund Antoni dr. docent uniw. Warszawa.
Zygmundowa Irena prof. gim. Warszawa.
Żyliński Eustachy prof. uniw. Lwów.

WSTĘP

W okresie przedwojennym liczba matematyków polskich była tak nieznaczna, że nie zachodziła potrzeba organizowania specjalnych zjazdów matematycznych. Sekcja matematyczna tworzona w ramach perjodycznych Zjazdów lekarzy i przyrodników polskich wystarczała dla potrzeb naukowych ówczesnej grupy matematyków.

Tak np. Sekcja matematyczna XI Zjazdu polskich lekarzy i przyrodników w Krakowie w r. 1911 zgromadziła przeważną ilość ówczesnych matematyków: wzięli w niej udział pp. Dickstein, Janiszewski, Kujawski, Łomnicki, Puzyna, Rosenblatt, Sierpiński, Stamm, Steinhaus. Wierzbicki, Zabielski, Zaremba, Ziobrowski i Zórawski, a referaty na posiedzeniach tej Sekcji wygłoszone w liczbie 15 ukazały się w Księdze pamiątkowej Zjazdu.

Stan ten uległ jednak zasadniczej zmianie z chwilą powrotu naszego Państwa do niepodległego bytu. Powstały nowe uniwersytety, nowe ośrodki pracy matematycznej, nowe czasopisma matematyczne, odgrywające już nie tylko u nas, ale wogóle w świecie naukowym doniosłą rolę. Również i pod względem organizacyjnym wiele się zmieniło: w roku 1920 powstało Polskie Towarzystwo Matematyczne, obejmujące wszystkich matematyków polskich pracujących naukowo, wydające własny organ i podzielone na Oddziały odpowiadające ośrodkom uniwersyteckim.

W tych warunkach potrzeba zorganizowania Zjazdu matematyków polskich stawała się coraz bardziej jasną. Organizowanie Sekcji matematycznej w łonie Zjazdów lekarzy i przyrodników nie mogło już wystarczyć. Okazało się to na ostatnim XII Zjeździe lekarzy i przyrodników polskich w Warszawie w r. 1925, posiadającym wśród 35 Sekcji także Sekcję Matematyki: w Sekcji tej wzięło udział zaledwie 10 matematyków.

Stało się oczywistem, że organizację Zjazdu matematycznego należało oprzeć na zupełnie odmiennych zasadach, zbliżonych do organizacji międzynarodowych kongresów matematycznych.

Na wniosek Lwowskiego Oddziału uchwaliło Walne Zgromadzenie Polskiego Tow. Matematycznego odbyte w Krakowie z wiosną r. 1926, urządzić I Polski Zjazd Matematyczny we Lwowie w r. 1927 i powierzyło całą organizację Zjazdu temuż Oddziałowi. Wyłoniony przez Lwowski Oddział Komitet Organizacyjny wybrał Komitet Honorowy, ustalił termin Zjazdu na dnie 7–10 września 1927 r. i utworzył 10 Sekcyj. Postanowiono rozszerzyć grono uczestników Zjazdu przez zaproszenie prócz wszystkich matematyków polskich także tych matematyków obcych narodowości, którzy ogłaszali swe prace naukowe w polskich czasopismach i tych, którzy pozostawali w żywszym kontakcie naukowym z matematykami polskimi. Osobnem pismem uwiadomiono o Zjeździe wszystkie Kuratorja Okręgów Szkolnych, zwracając uwagę na ważność Sekcji dydaktyki matematyki.

Wkładkę członków Zjazdu ustalono na 10 złp. (wolni od niej byli zagraniczni uczestnicy obcych narodowości). Wystarano się o zniżki kolejowe dla wszystkich uczestników Zjazdu a gościom zagranicznym zapewniono ponadto zwrot kosztów wiz paszportowych i bezpłatne mieszkanie w hotelach.

Przed Zjazdem Komitet opracował i wydał drukowany Program I Zjazdu Mat. Pol. z szczegółowym rozkładem prelekcyj na sekcje, z rozkładem sal i godzin. Przez cały czas trwania Zjazdu stały dyżur wyznaczał kwatery, rozdzielał odznaki zjazdowe, legitymacje i druki.

O zainteresowaniu się zagranicy świadczyć może lista matematyków zagranicznych, którzy bądźto zapowiedzieli swój przyjazd, bądź to nadesłali gratulacje: P. Alexandroff, A. F. Andersen, N. Bary, A. Bilimović, O. Blumenthal, L. E. J. Brouwer, G. Bouligand, A. Denjoy, A. Errera, A. Fraenkel, M. Fréchet, W. Gontcharoff, V. Hlavaty, J. Kampé de Fériet, R. G. Lubben, M. Ławrentiew, N. Luzin, R. Mehmke, D. Mienszow, Mittag-Leffler, L. Neder, J. v. Neumann, P. Sergescu, A. Tychonow, F. Vasilesco, H. Villat i W. A. Wilson.

Dnia 7 września 1927 o godz. 11-tej rano odbyło się uroczyste otwarcie Zjazdu w auli Uniwersytetu Jana Kazimierza w obecności reprezentantów władz i towarzystw naukowych.

Zjazd otworzył, prezes Komitetu Organizacyjnego, prof. Maksymiljan Huber, wygłaszając przemówienie następujące:

„Wielce szanowne Zebranie!

Witając imieniem Komitetu Organizacyjnego czcigodnych gości i uczestników I Polskiego Zjazdu Matematycznego, składam gorące podziękowanie dostojnym przedstawicielom władz, instytucyj naukowych i społecznych, zrzeszeń i prasy, oraz wszystkim gościom, którzy zaszczycili swoją obecnością dzisiejsze otwarcie Zjazdu. Osobne podziękowanie winienem Ich Magnificencjom Rektorom Uniwersytetu i Politechniki za łaskawe poparcie Zjazdu przez udzielenie gmachów obu uczelni na nasze cele a mianowicie auli Uniwersytetu na otwarcie, a sal wykładowych i auli Politechniki na obrady i zamknięcie Zjazdu. Wdzięczność należy też wyrazić Ministerstwu W. R. i O. P. oraz Kuratorjom Okręgów szkolnych za pomoc i udzielanie urlopów uczestnikom Zjazdu należącym do gron nauczycielskich szkół średnich. Z podziękowaniem i wdzięcznością podnoszę poparcie Ministerstwa Komunikacji przez udzielenie zniżek kolejowych dla uczestników nie korzystających z innych ulg. Ciesząc się posiadaniem w gronie członków Zjazdu Wicepremjera naszego Rządu profesora Kazimierza Bartla, członka Komitetu Honorowego Zjazdu, miło mi stwierdzić że p. Wicepremjer nie poprzestał na złożeniu (jeden z pierwszych) zwykłej składki członkowskiej, lecz udzielił z funduszu dyspozycyjnego wydatnego materjalnego poparcia na koszta Zjazdu, które będą niemałe wobec zamiaru wydania drukiem Księgi Zjazdowej ze wszystkiemi referatami. Składając mu na tem miejscu gorące podziękowanie, zwracam się myślą ku Najwyższemu Dostojnikowi naszego Państwa, Panu Prezydentowi Ignacemu Mościckiemu nietylko jako włodarzowi Rzeczypospolitej, ale i mężowi nauki w dziedzinie bardzo bliskiej naukom matematycznym. Uważam przeto za pierwszy obowiązek Zjazdu przesłanie depeszy z wyrazami hołdu dla Pana Prezydenta.

Dziękuję wreszcie wszystkim szanownym uczestnikom, którzy z różnych dzielnic kraju i z zagranicy przybyli do Lwowa, nie szczędząc trudu i kosztów dla szczytnych celów współpracy naukowej w dziedzinie matematyki czystej i stosowanej. Szczególnie zaś miło mi powitać uczonych zagranicznych innych narodowości, którzy z dalekich stron pośpieszyli na nasze zaproszenie, aby wraz z nami obchodzić zapoczątkowane przez Polskie Towarzystwo Matematyczne święto naszych nauk matematycznych.

Pozwoli Szanowne Zgromadzenie, że te słowa powitania powtórzę w języku lepiej zrozumiałym dla naszych miłych gości:

„Il m'est particulièrement agréable, de faire la bienvenue aux savants venus de l'étranger, qui des pays lointains se pressaient d'arriver à notre invitation, pour célébrer avec nous la fête des sciences mathématiques, initiée par la Société polonaise de Mathématique".

Wielce Szanowni Państwo! Nauki matematyczne stanowią nader rozległy dział wiedzy ludzkiej, wyodrębniający się z jednej strony przez abstrakcję od jakości wszelkich rzeczy będących wogóle przedmiotem nauki, a z drugiej strony przez własność przenikania coraz to innych gałęzi wiedzy, które z wielką dla nich korzyścią przyswajają sobie matematyczne metody badania. Skromna liczba podstawowych pojęć matematyki kojarzy się dziwnie z olbrzymią ilością środków, jakich ona dostarcza innym naukom ścisłym, a także tym, które podążają ku ścisłości właśnie przez coraz obszerniejsze stosowanie metod matematycznych. Czyż potrzeba w tem ścisłem gronie przypominać opinję wielkiego filozofa królewieckiego o szczytnej roli matematyki w różnych gałęziach wiedzy?

Patrząc na przeogromny gmach nauk matematycznych, zaprzątających tak wiele umysłów pod pewnym względem pokrewnych, a jednak często silnie się różniących, widzimy niejako niekończącą się nigdy budowę niebosiężnego tumu gotyckiego o nader licznych wieżyczkach i kapliczkach. Jedni matematycy pracują wytrwale i z zapałem około fundamentów tego gmachu i śledząc bacznie każdy najdrobniejszy błąd w założeniu, wciąż uzupełniają i modyfikują pierwotny plan budowli. To przedstawiciele matematyki czystej. Inni wykańczają nieraz w równie wielkim trudzie szczegóły owych wieżyczek i kapliczek, tworząc ich subtelną rzeźbę. Są to pracownicy matematyki stosowanej. Trzecia wreszcie grupa zajmuje się sporządzaniem przejrzystych uproszczonych planów każdej części tego gmachu, które ułatwiają zwiedzającym jego poznanie. Mam tu na myśli dydaktyczną pracę matematyków nauczycieli.

Wszystkich łączy wspólna idea, wszyscy patrzą z podziwem i zachwytem w rosnące wciąż ku niebu szczytowe wieże niekończącej się nigdy, a przecież zawsze wspaniałej i harmonijnej budowy.

Pozwolę sobie tutaj podnieść jeszcze jedną cechę matematyki. Jest to nauka najbardziej ze wszystkich międzynarodowa, dzięki wspólnemu na całej ziemi językowi symboli, jakiemi przemawia. Ale ta międzynarodowość bynajmniej nie bruździ twórczemu i szlachetnie pojętemu nacjonalizmowi łączącemu ludzi wspólnego języka ojczystego; wcale zatem nie przeszkadza, ażeby np. matematycy polscy łączyli się we wspólnej pracy przez wydawanie polskich pism matematycznych i zrzeszanie się w Polskiem Towarzystwie Matematycznem. Ta łączność narodowa domaga się również Zjazdów matematyków polskich, na których odbywać się będzie wspólny przegląd pracy dokonanej naszemi siłami około wspomnianej alegorycznej świątyni".

Po przemówieniu prof. Hubera, JM Ks. Rektor Gerstman witał Zjazd imieniem Uniwersytetu, prof. W. Sierpiński imieniem Akademji, rektor Łopuszański imieniem Politechniki Lwowskiej, prof. Twardowski imieniem lwowskich instytucji naukowych oraz prof. Loria, imieniem Towarzystwa Fizycznego i jako dziekan Wydziału matematyczno-przyrodniczego Uniwersytetu Lwowskiego. Z matematyków zagranicznych przemawiali pp. Hlavaty i Sergescu. Wreszcie odczytano pisma i depesze gratulacyjne od szeregu instytucji naukowych i poszczególnych osób.

Po ukonstytuowaniu się prezydjum Zjazdu i dokonaniu wyborów władz Zjazdu uchwalono wysłać do p. Prezydenta Rzeczypospolitej depeszę z wyrazami hołdu. Ponadto uchwalono do nieobecnego z powodu choroby prof. Zaremby wysłać depeszę następującą:

JWielmożny Panie Profesorze!

W imieniu I Polskiego Zjazdu Matematycznego mam zaszczyt przesłać JWielmożnemu Panu Profesorowi wyrazy szczerego żalu, że nie mógł wziąć udziału w naszych obradach, oraz życzenia jaknajszybszego powrotu do zdrowia.

W Zjeździe wzięło udział około 200 matematyków z całej Polski i zagranicy i 7 matematyków obcych narodowości a mianowicie: A. F. Andersen z Kopenhagi, Nina Bary z Moskwy, V. Hlavaty z Pragi, N. Łuzin z Moskwy, D. Mienszow z Moskwy, J. v. Neumann z Budapesztu i P. Sergescu z Cluj w Rumunji.

Obrady w sekcjach odbywały się codziennie od g. 9 do 13 i od g. 15 do 20 w salach Politechniki Lwowskiej. W sekcjach wygłoszono około 100 referatów, z których dwa wygłoszone były w Sekcji Ogólnej, mianowicie: prof. Lichtensteina „O prawie Newtona" i prof. Sierpińskiego „Funkcje a zbiory".

W toku obrad wyłoniło się wiele wniosków ogólniejszej natury, które uzgodniła i zredagowała ostatecznie Komisja wniosków i które przyjęte były na końcowem plenarnem posiedzeniu Zjazdu. (Wnioski te umieszczamy osobno).

Najistotniejszą korzyścią Zjazdu były rozliczne dyskusje i ożywiona wymiana myśli uczestników przez cały czas Zjazdu. Serdeczny nastrój podczas zebrań towarzyskich i bankietu w salach hotelu Krakowskiego pozostanie na długo w pamięci wszystkich członków Zjazdu. Użyteczność i potrzebę dalszych zjazdów matematycznych jako walnego środka do podtrzymania i ożywienia twórczości naukowej zadokumentowano uchwałą zwołania w r. 1929 Zjazdu matematyków krajów słowiańskich oraz drugiego Polskiego Zjazdu Matematycznego w r. 1931.

Zamknięcie Zjazdu nastąpiło d. 10 września w auli Politechniki Lwowskiej. Przemawiali: JM Rektor Politechniki Lwowskiej prof. J. Tokarski, prof. Hlavaty w imieniu Czesko-słowackiego Związku matematyków i fizyków oraz prof. Andersen, Sergescu i Dickstein. Prezes Zjazdu prof. Sierpiński, zamykając Zjazd, wyraził gorące podziękowanie Komitetowi Organizacyjnemu za tak staranne przygotowanie Zjazdu, rektorom Uniwersytetu i Politechniki za udzielenie lokali oraz gościom zagranicznym, którzy swą obecnością uświetnili Zjazd i w wysokim stopniu przyczynili się do jego powodzenia.

Podnieść również należy życzliwy stosunek Władz Państwowych, którego Zjazd doznał w szczególności ze strony ówczesnego Wicepremjera prof. Kazimierza Bartla, członka Komitetu Honorowego Zjazdu. Jego poparciu Zjazd i organizowanie matematyki w Polsce szczególnie wiele zawdzięczają.

Uchwały Zjazdu.

1) „Zjazd uchwala zwołanie do Warszawy w roku 1929 Kongresu Matematyków Krajów Słowiańskich. Wykonanie tej uchwały porucza się Komitetowi Organizacyjnemu (z prawem kooptacji) w następującym składzie:

– Prof. Bydzowski z Pragi
– Prof. Kryłow z Kijowa
– Prof. Kuratowski ze Lwowa
– Prof. Luzin z Moskwy
– Prof. Mazurkiewicz z Warszawy
– Prof. Petrovitch z Białogrodu
– Prof. Popoff z Sofji
– Prof. Sierpiński z Warszawy".

2) „I. Polski Zjazd Matematyczny uchwala zwołać II. Polski Zjazd Matematyczny w r. 1931 w miejscu, które Polskie Tow. Mat oznaczy. Polskie Towarzystwo Matematyczne zajmie się organizacją tego Zjazdu".
3) „Zjazd wypowiada się za bezwzględnem przestrzeganiem zasady, że prawo delegowania reprezentantów polskich na Kongresy Międzynarodowych Unij Matematyczno-Przyrodniczych mają tylko Narodowe Komitety odpowiednich Unij. Wszelkie odstępstwa od tej zasady są niedopuszczalne i dla powagi Państwa wysoce szkodliwe".
4) „Zjazd uważa za niezbędne utworzenie w Warszawie Centralnej Bibljoteki matematycznej, jako bibljoteki Komitetu Narodowego Polskiego Unji Międzynarodowej Matematycznej i porozumienie się w tym względzie: z Towarzystwem Naukowem Warszawskiem, z Seminarjum Matematycznem Uniwersytetu Warszawskiego, oraz o zwrócenie się do M. W. R. i O. P. o stałe subsydjum dla tej instytucji".
5) „I. P. Z. M. wyraża wdzięczność Ministerstwu W. R. i O. P. a w szczególności Wydziałowi Nauki tegoż Ministerstwa

za popieranie matematyki polskiej przez subwencjonowanie wydawnictw matematycznych. I. P. Z. M. uważa jednak za niezbędne trwałe ugruntowanie egzystencji „Fundamenta Mathematicae" i „Prac matematyczno-fizycznych" przez wstawienie na ten cel w budżecie wydatnych i stałych pozycji, aby publikacje te mogły ukazywać się regularnie. „Fundamenta Mathematicae" odegrały niezmiernie ważną rolę w rozwoju matematyki polskiej; im zawdzięcza się fakt, iż znaczenie międzynarodowe tego działu naszej nauki wzrosło wybitnie w ostatnich latach. „Prace matematyczno-fizyczne" są najstarszem pismem matematycznem w Polsce, bo wychodzą od r. 1888 i przetrzymały najgorsze dla nauki polskiej czasy. Same nazwy tych czasopism wskazują na różnicę w ich kierunkach naukowych, dlatego niezbędnem jest kontynuowanie obydwóch, tembardziej, że już dziś nawet obydwa razem nie mogą podołać wydawaniu nadsyłanych im oryginalnych i cennych prac, tak że znaczną część manuskryptów skierowuje się zagranicę, a inna niemała część czeka po kilka lat na miejsce. Jeżeli rozwój matematyki polskiej nie ma ulec opóźnieniu i jeżeli ma odbywać się harmonijnie we wszystkich kierunkach myśli matematycznej, to kwestja materjalnego bytu „Fundamenta Mathematicae" i „Prac matematyczno-fizycznych" musi stać się przedmiotem szczególnej troski Min. W. R. i O. P.".

6) „Zważywszy, że polskie prace z matematyki stosowanej, statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa

są rozproszone w wielu różnych pismach, co uniemożliwia lub też bardzo utrudnia ich wyszukiwanie, przeto I. P. Z. M. zaleca publikowanie tych prac w jednem piśmie, a mianowicie w „Wiadomościach Matematycznych", gościnnie otwartem dla tychże prac przez p. Redaktora Dicksteina".

7) „I. P. Z. M. uchwala domagać się od Min. W. R. i O. P. organizowania i finansowania kursów dokształcających dla nauczycieli szkół średnich, a mianowicie:
   1. kursów, urządzanych w miastach uniwersyteckich w czasie feryj szkolnych, w celu uzupełnienia wiedzy matematycznej;
   2. konferencyj okręgowych, zwoływanych dla jednego lub kilku kuratorjów w czasie nauki szkolnej, celem zapoznania się z metodami szkolnemi, w związku z lekcjami praktycznemi w czasie nauki szkolnej".

8) „Stwierdzając nadmierną wybujałość tendencyj abstrakcyjnych w obowiązujących programach, przeładowanie planów kwestjami nader subtelnemi i trudnemi i szereg innych niewłaściwości:
   I. P. Z. M. domaga się gruntownej rewizji i reformy programów nauczania pod względem celów, zakresu i uporządkowania materjału, ze współudziałem jakn aj szerszego koła znawców (tak dydaktycznych, jak i naukowych) z całej Rzeczypospolitej Polskiej".

9) „Dla rozwoju wiedzy matematycznej w Polsce jest rzeczą niezmiernie ważną, aby młodzi pracownicy naukowi mogli pozostawać w kontakcie z ośrodkami uniwersyteckimi po

ukończeniu studjów. Ministerstwo W. R. i O. P. powinno czuwać nad tem, aby nauczyciele szkół średnich pracujący naukowo mieli pierwszeństwo przed innymi kandydatami, gdy wakuje posada nauczycielska w siedzibie szkoły akademickiej i wydać rozporządzenie, nakazujące uważać pracę naukową udowodnioną publikacjami jako kwalifikację rozstrzygającą, gdy chodzi o taką posadę".

10) „W celu zogniskowania prac nauczycielstwa na polu dydaktyki matematyki i reprezentowania opinji nauczycielstwa przed Władzami Rzeczypospolitej w sprawach dotyczących programów i metod nauczania matematyki, uczestnicy I. P. Z M. we Lwowie uznają za konieczne założenie „Polskiego Towarzystwa Nauczycieli Matematyki".

Rzeczywistemi członkami T-wa mogą być nauczyciele matematyki i dydaktyki w szkołach polskich wszystkich typów, t. zn. w szkołach powszechnych, średnich, ogólnokształcących, zawodowych, w zakładach kształcenia nauczycieli matematyki oraz uczelniach akademickich.

Za podstawę statutu będzie przyjęty statut Zrzeszenia Polskich Nauczycieli Geografji, uchwalony na II. Ogólno-Polskim Zjeździe Polskich Nauczycieli Geografji w Łodzi.

Zjazd poleca swemu Prezydjum troskę o ustalenie kontaktu między Polakiem Tow. Matematycznem a Polskiem Tow. Nauczycieli Matematyki.

Zjazd powołuje Komitet Organizacyjny w składzie: pp. Rusieckiego, Sierpińskiego, Straszewicza, Wojtowicza.

Komitet Organizacyjny będzie miał za zadanie legalizację statutu, który uchwali na prawach Walnego Zebrania, przyjmowanie członków, wydawanie ze składek członkowskich czasopisma, poświęconego matematyce elementarnej i dydaktyce matematyki, przy ewentualnej współpracy członków Polskiego Towarzystwa Matematycznego, poczyni przygotowania do Zjazdu członków nowego Towarzystwa.

Dział I. Logika matematyczna i podstawy matematyki

Henryk Greniewski (Warszawa)

O jedynym terminie pierwotnym logiki matematycznej

Pracę nad redukcją terminów pierwotnych logiki rozpoczęliśmy wspólnie z Drem Leonem Chwistkiem na wiosnę 1925-ego roku. Wkrótce potem postawiliśmy sobie zadanie następujące: Zbudować system logiki matematycznej oparty na jedynym terminie pierwotnym i zawierający tylko nominalne definicje! (1). Jednakże okazało się, że to zadanie posiada bardzo wiele rozwiązań (w tem nieskończoną ilość rozwiązań nieestetycznych w postaci funkcyj o wielkiej ilości argumentów.

Wobec tego zaczęliśmy pracować oddzielnie, każdy z nas na własną rękę zaczął poszukiwać innego rezultatu. W referacie niniejszym przedstawię tylko wyniki moich badań. Rezultaty Dra Chwistka zostaną ogłoszone osobno.

Odczyt niniejszy jest niestety, tylko obszernym komunikatem. Nie udało mi się zmieścić w ramach 40-to minutowego przemówienia żadnych dowodów.

§ 1. Dr. Scheffer dowiódł, że wszystkie funkcje pewnej części logiki matematycznej, mianowicie teorji dedukcji dają się zdefinjować przy pomocy jednej z nich, mianowicie przy pomocy t. zw. wyłączania. (2). Jak wiadomo istnieją jeszcze inne części we współczesnej logice, które swym zewnętrznym wyglądem przypominają algebrę zdań (t. j. teorję dedukcji), a mianowicie:

1) algebra zbiorów,
2) algebra stosunków,
3) algebra indywiduów (czyli teorja mnogości prof. Leśniewskiego).

Na analogję między ostatnią teorją, a wyżej wymienionemi algebrami zwrócił pierwszy uwagę Dr. A. Tarski.

Zauważmy teraz, że w każdej z trzech ostatnio wymienionych teoryj można zbudować po 2 funkcje (jedna zdaniowa, druga niezdaniowa), z których każda ma wiele własności przypominających Shefferowskie wyłączanie. Są to funkcje następujące:

1) klasa takich k, że k nie należy do klasy α, lub k nie należy do klasy β,
2) stosunek między takiemi k, l, że k nie pozostaje w stosunku R do l, lub k nie pozostaje w stosunku S do l,
3) uzupełnienie indywiduum x łącznie z uzupełnieniem indywiduum y.

Uwaga: Uzupełnieniem indywiduum x nazywam jedyne indywiduum z, które otrzymuje się przez odjęcie („wycięcie") ze świata (czyli z najszerszego indywiduum) przedmiotu x.

Podałem już funkcje niezdaniowe, podam teraz – zdaniowe:

1) przy wszelkiem k, k nie należy do klasy α, lub k nie należy do klasy β, (czyli klasy: α, β są rozłączne),
2) przy wszelkich k, l, k nie pozostaje w stosunku R do l, lub k nie pozostaje w stosunku S do l (czyli stosunki: R, S są rozłączne),
3) indywiduum x jest nazewnątrz indywiduum y.

Łatwo się przekonać, że przy pomocy wyłączania („nie $-p$, lub nie $-q$") i sześciu wyliczonych wyżej funkcyj można zdefinjować wszystkie terminy logiki matematycznej (wraz z algebrą indywiduów). (3) Wszystkie siedem funkcyj mają dużo podobnych własności. Przyszło mi więc na myśl, żeby określić je wszystkie przy pomocy jednego terminu pierwotnego, mianowicie przy pomocy jakiejś funkcji typikalnie wieloznacznej, przy pomocy jakiegoś „wyłączania w dowolnym typie logicznym".

Wydaje mi się, że projekt ten zrealizowałem.

§ 2. Zanim określę termin pierwotny będę musiał krótko zreferować pewien sposób używania zmiennych pozornych pomysłu Dra Chwistka.

W matematyce często używamy funkcyj o argumentach funkcyjnych (np.: całki nieokreślone, pochodne, granice), to samo w logice (kwantyfikatory, wyrażenia postaci: klasa takich x, że... i t. d.).

Funkcjom takim nadaje się zwykle postać:

$$F_k f(k), \quad \text{np.: } D_x f(x).(\exists x) f(x).$$

Zmienne powtórzone w takich wyrażeniach nazywamy pozornemi. Ten sposób używania zmiennych pozornych ma jednak dwie niedogodności:

1) przy stosowaniu tego sposobu zapisujemy funkcje o argumentach funkcyjnych rozwlekle i zawile,
2) przy stosowaniu tego sposobu definjowanie nominalne funkcyj o argumentach funkcyjnych jest wysoce utrudnione (definjowane bowiem funkcje mają w tym wypadku zawierać w sobie wyrażenia mające już przedtem ustalony sens, mianowicie mają zawierać wyrażenia postaci „$f(k)$".

Być może, że A. N. Whitehead i B. Russell chcieli pierwszą z tych niedogodności usunąć, pisząc (ale tylko w pewnych wypadkach, dla kwantyfikatorów i klas tej metody np. nie stosowali) wyrażenia postaci:

$$F f \hat{k} \quad \text{zamiast} \quad F_k f(k).$$

Używana przez tych logików metoda „daszkowa" nasuwa jednak pewne wątpliwości (zwrócił na nie uwagę Dr. Chwistek (4)), nie wiadomo, czy

$$F^{(1)}[F_k^{(2)} f(k)] = F^{(1)}[F^{(2)} f(\hat{k})]$$

czy też

$$F_k^{(1)}[F^{(2)}f(k)] = F^{(1)}[F^{(2)}f(\hat{k})]$$

Wobec powyższego będziemy za Drem Chwistkiem pisali wyrażenia postaci „$\hat{u}f(k)$", zamiast wyrażeń postaci „$f(k)$". Jeśli chcemy wyrażenie postaci „$\hat{u}f(k)$" podstawić na miejsce argumentu funkcyjnego, to nadajemy najwpierw podstawianemu wyrażeniu postać „$\hat{u}f(\hat{u})$". Zatem zamiast pisać zgodnie z tradycją:

$$F_k\varphi(k)$$

piszemy:

$$F[\hat{u}\varphi(\hat{u})].$$

§ 3. Dla uproszczenia sobie zadania przeprowadzę redukcję terminów pierwotnych na gruncie uproszczonej logiki matematycznej. Usuńmy mianowicie tymczasowo z logiki teorję stosunków (rozumianych jako funkcje zdaniowe o dwu argumentach), stracimy wtedy niewiele, mianowicie tylko teorję stosunków niejednorodnych (t. j. zachodzących między przedmiotami różnych typów logicznych), albowiem teorję stosunków jednorodnych można odbudować w obrębie teorji klas (jako teorję klas par porządkowych w sensie Dra K. Kuratowskiego). (5).

§ 4. Wiemy już, że logikę można oprzeć na siedmiu bardzo podobnych do siebie terminach pierwotnych. Wobec ostatnich uwag możemy liczbę tych terminów logiki (uproszczonej) ograniczyć do pięciu.

Nadam teraz sens wyrażeniu:

$$\hat{n} \square (a, b, c).$$

W wypadku, gdy wszystkie trzy argumenty są zdaniowe, przyjmuję, że

$$\hat{n} \square (r, p, q) \equiv (\text{nie } - p, \text{ lub nie } - q).$$

W wypadku, gdy pierwszy argument jest zdaniowy, a pozostałe dwa są klasowe (oba tego samego typu logicznego) przyjmuję, że

$$\hat{n} \square (p, \alpha, \beta) \equiv (\text{klasy: } \alpha, \beta \text{ są rozłączne}).$$

W wypadku, gdy wszystkie trzy argumenty są klasowe (tego samego typu) przyjmuję, że

$$\hat{n} \square (\gamma, \alpha, \beta) \equiv (\text{uzupełnienie klasy } \alpha \text{ łącznie z uzupełnieniem kl. } \beta).$$

W wypadku, gdy pierwszy argument jest zdaniowy, a pozostałe dwa są indywiduowe, przyjmuję, że

$$\hat{n} \square (p, y, z) \equiv \text{indywiduum } y \text{ jest nazewnątrz indywiduum } z.$$

W wypadku, gdy wszystkie trzy argumenty są indywiduowe, przyjmuję, że

$$\hat{n} \square (x, y, z) = \text{uzupełnienia indywiduum } y \text{ łącznie z uzupełnieniem indywiduum } z.$$

Jak widać wprowadziłem funkcję „$\hat{k} \square (a, b, c)$” nie na drodze nominalnej definicji. Może zachodzić obawa, że dołączenie do logiki zdań określających tę funkcję doprowadzi do sprzeczności. Dla przekonania się, że tak nie jest, podam w odczycie niniejszym podstawy całkowito-liczbowej interpretacji logiki (uproszczonej) i zdań określających moją funkcję.

§ 5. Przeprowadzę teraz pewne rozważania czysto arytmetyczne. Będę używał aż czterech rodzajów zmiennych liczbowych:

1) zmiennych całkowito-liczbowych: k, m, n, l, u, na miejsce których postanawiam podstawiać tylko symbole liczb całkowitych bezwzględnych,
2) zmiennych pseudo-logicznych: a, b, c, na miejsce których postanawiam podstawiać tylko symbole liczb dobrych (klasa liczb dobrych zostanie wkrótce określona),
3) zmiennych pseudo-zdaniowych: p, q, r, na miejsce których postanawiam podstawiać tylko symbole liczb 40 i 50,
4) zmiennych pseudo-indywiduowych: x, y, z, na miejsce których postanawiam podstawiać symbole liczb 41 i 51.

Będę teraz nazywał:

1) liczbę 0 podstawą obszaru 0-wego (czyli logistycznego),
2) liczbę 1 podstawą obszaru 1-ego (czyli ontologicznego),
3) liczbę 2 odpowiednikiem Bezsensu,
4) liczbę 40 odpowiednikiem Fałszu,

5) liczbę 50 odpowiednikiem Prawdy,
6) liczbę 41 odpowiednikiem Niczego,
7) liczbę 51 odpowiednikiem Wszystkiego (Świata, Najszerszego indywiduum).

Ostatnio wprowadzone nazwy mają na celu jedynie uczynić bardziej intuicyjną dalej podaną interpretację liczbową logiki.

Wprowadzam najwpierw jako pojęcia pomocnicze:

1) pojęcie dodawania dziesiętnego „$k \underset{10}{+} m$”
2) pojęcie sumacji dziesiętnej ciągu induktywnego „$\sum\limits_{10} {}_n (u_n)$”,
3) pojęcie mnożenia dziesiętnego „$k \underset{10}{\times} m$”.

Będę odtąd mówił „liczba”, zamiast „bezwzględna liczba całkowita”. Sumę dziesiętną dwu liczb m, n obliczamy pisząc nazwę liczby m w systemie dziesiętnym, dalej bezpośrednio (na prawo) nazwę w tymże systemie liczby n, całość otrzymana jest nazwą liczby $(m \underset{10}{+} n)$.

Np.:

$$31 \underset{10}{+} 701 = 31701.$$

Sumację dziesiętną i mnożenie dziesiętne określa się rekurencyjnie tak samo, jak zwykłą sumację i zwykłe mnożenie przy pomocy dodawania. Mamy więc np.:

Rezultat sumacji dziesiętnej ciągu: 1, 2, 3, = 123

$$2 \underset{10}{\times} 3 = 2 \underset{10}{+} (2 \underset{10}{+} 2) = 222.$$

Argumenty dodawania dziesiętnego nazywam składnikami dziesiętnemi. (Precyzyjne definicje omawianych terminów podaję w przypisach). (6) Wśród liczb wyróżnię teraz pewne dla naszych celów szczególnie interesujące, mianowicie, liczby puste i liczby niepuste.

Liczba pusta typu m-tego, obszaru k-tego $= (4 \underset{10}{\times} m) \underset{10}{+} k$, gdzie $m/1, 2, 3, 4, \ldots$ $k/0, 1$.

Przykłady liczb pustych:

	Obszar 0-wy	Obszar 1-y	
typ 1-y	40	41	i t. d.
typ 2-gi	440	441	
typ 3-ci	4440	4441	

Liczba niepusta typu 1-ego, obszaru 0-wego = 50.

Liczba niepusta typu 1-ego, obszaru 1-ego = 51.

Weźmy pod uwagę ciąg U dowolny, ale spełniający wszystkie warunki następujące:

1) U jest ciągiem rosnącym (nietylko niemalejącym) lub jest ciągiem o jednym tylko wyrazie,
2) każdy wyraz ciągu U jest liczbą pustą typu k, obszaru m, lub liczbą niepustą tegoż typu i obszaru,
3) U ma tylko induktywną, lecz większą od 0 ilość wyrazów.

Wykonajmy sumację dziesiętną na ciągu U, rezultat oznaczmy przez „S".

Liczba $(5 \underset{10}{+} S)$ jest liczbą niepustą typu $(k+1)$-ego. obszaru m-tego. Uwaga: $m/0, 1$. (7).

Będę nazywał liczbami dobremi tylko liczby następujące:

1) liczbę 0,
2) liczbę 1,
3) liczby puste, oraz
4) liczby niepuste.

Przykłady liczb niepustych:

	Obszar 0-wy	Obszar 1-y
typ 1-y	50	51
typ 2-gi	540,550, 54050	541,551,54151
typ 3-ci	5440,5540,5540550, . . .	5441, . . . ,554151, . . .

Liczbę dobrą typu przynajmniej drugiego możnaby zawsze nazwać klasą złożoną ze składników dziesiętnych tej liczby, posiadających typ o jedność niższy niż ta liczba.

Np.: Liczbę dobrą 54151 możnaby nazwać klasą złożoną z liczb: 41 oraz 51.

Liczbę 0 będę też nazywał liczbą dobrą typu O-wego, obszaru 0-wego.

Liczbę 1 będę też nazywał liczbą dobrą typu 0-wego, obszaru 1-ego. Określam teraz inkluzję dwu liczb dobrych („$a \subset b$").

1) $(0 \subset 0) = 50$,
2) $(1 \subset 1) = 50$,
3) przypuśćmy, że a jest liczbą tego samego typu i obszaru, co b, odróżniamy teraz 3 przypadki następujące:
   (A) a jest liczbą pustą, wtedy $(a \subset b) = 50$,

(B) a posiada tylko takie składniki dziesiętne o jeden typ niższe od a, które są zarazem składnikami dziesiętnemi liczby b, wtedy $(a \subset b) = 50$,

(C) nie zachodzi ani (A), ani (B), wtedy $(a \subset b) = 40$,

4) we wszystkich pozostałych wypadkach: $(a \subset b) = 2$.

Uwaga: Przy pomocy inkluzji liczb można zbudować wiele funkcyj stałych (dla wszelkich dopuszczonych podstawień, równych liczbie 50), które zewnętrznie niczem się nie różnią od tez prawdziwych teorji dedukcji, czy algebry klas.

Określam jeszcze jedno działanie dwumienne: jedność typikalna liczb dobrych („$a \mathrm{T} b$").

1) Jeśli a jest tego samego typu i obszaru, co liczba b, to

$$(a \ \mathrm{T} \, b) = 50,$$

2) w pozostałych wypadkach:

$$(a \, \mathrm{T} \, b) = 2.$$

Muszę jeszcze określić na gruncie arytmetyki pewną funkcję o argumencie funkcyjnym (ciągowym) (8): klasa liczb a zbudowana z ciągu $U(a)$.

Przedtem musimy wyróżnić pewne ciągi liczbowe, które nazywam ciągami zbiorotwórczemi. Ciągi te przypisują liczbom dobrym danego typu i obszaru odpowiednik *Prawdy*, lub odpowiednik *Fałszu*. (9).

Weźmy teraz pod uwagę dowolny ciąg zbiorotwórczy $U(a)$. Możemy niekiedy zbudować ciąg jednowyrazowy, lub rosnący (nietylko niemalejący!), który przyporządkowuje liczbom całkowitym tylko te liczby dobre, którym ciąg $U(a)$ przypisuje liczbę 50, nowy ten ciąg (jeśli się daje zbudować) oznaczamy:

$$\Phi_a(V(a), n).$$

Przypuśćmy, że istnieje ciąg

$$\Phi_a(V(a), n)$$

wtedy przyjmujemy, że

$$Kl_a[V(a)] = 5 \underset{10}{+} \sum_{10} {}_n[\Phi_a(V(a), n)]$$

w przeciwnym razie, przyjmujemy, że

$Kl_a[V(a)] =$ liczbie pustej o jeden typ wyższej i będącej
tego samego obszaru, co jakakolwiek
liczba c, taka, że $U(c) = 40$.

Przypuśćmy teraz, że ciąg U nie jest zbiorotwórczy, w takim razie przyjmuję, że

$$Kl_a[V(a)] = 2 \text{ (odpowiednikowi Bezsensu).}$$

Przyjmuję następujące definicję:

1. Negacja pseudo-zdaniowa $\sim(p) \underset{\mathrm{Df}}{=} (p \subset 40)$.
2. Wyłączanie pseudo-zdaniowe $(p|q) \underset{\mathrm{Df}}{=} (p \subset \sim (q))$.
3. Mnożenie pseudo-zdaniowe $(p.q) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sim (p|q)$.
4. Izos liczby dobrej $\iota(a) \underset{\mathrm{Df}}{=} Kl_b[(b \subset a).(a \subset b)]$.
5. Przynależność liczby dobrej a do liczby dobrej b

$$(a \epsilon b) \underset{\mathrm{Df}}{=} [\iota(a) \subset b].$$

6. Wyłączanie liczb dobrych $(a \nabla b) \underset{\mathrm{Df}}{=} Kl_c[(c \varepsilon a)|(c \varepsilon b)]$.
7. Liczba pełna zawierająca liczbę a, $V(a) \underset{\mathrm{Df}}{=} [a \nabla (a \nabla a)]$.

Podam teraz najważniejszą definicję niniejszego referatu: Określam funkcję o trzech argumentach „$\sqcup(a, b, c)$”:

1) przypuśćmy, że $(b \mathbf{T} c) = 50$, wtedy

$$\sqcup(p, b, c) = [V(b) \subset (b \nabla c)],$$

2) przypuśćmy, że $(a \ \mathbf{T} b) = 50$, $(b \mathbf{T} c) = 50$ i że $(a \ \mathbf{T} p) = 2$, wtedy

$$\sqcup(a, b, c) = (b \nabla c),$$

3) w pozostałych przypadkach

$$\sqcup(a, b, c) = 2.$$

Ostatnio zdefinjowaną funkcję nazywam ogólnem wyłączaniem liczb dobrych.

§ 6. Podaję następującą interpretację całkowito-liczbową funkcji „$\hat{n} \,\square\, (a, b, c)$":

1) „$\hat{n} \,\square\, (a, b, c)$" interpretuję jako „$\sqcup(a, b, c)$",
2) „$\hat{n} \,\square\, (p, \hat{n}, c)$" interpretuję jako „$Kl_b[\sqcup(p, b, c)]$",
3) „$\hat{n} \,\square\, (p, b, \hat{n})$" interpretuję jako „$Kl_c[\sqcup(p, b, c)]$",
4) „$\hat{n} \,\square\, (p, \hat{n}, \hat{n})$" interpretuję jako „$Kl_b[\sqcup(p, b, b)]$".

To przyporządkowanie terminów logicznych terminom arytmetycznym nazywam interpretacją H.

Podaję następującą interpretację całkowito-liczbową terminów dotychczas powszechnie uznanych za terminy pierwotne logiki:

	Terminy logiczne,	terminy arytmetyczne:
1)	$p \| q$	$p \| q$
2)	$\varphi(a)$	$a\varepsilon\varphi,\ \varphi(a)$
3)	$(a)\varphi(a)$	$\{V[Kl_a(a\varepsilon\varphi)] \subset Kl_a[a\varepsilon\varphi]\}$,
4)	$\hat{a}[\varphi(\hat{a})]$	$Kl_a(a\varepsilon\varphi),\ Kl_a[\varphi(a)]$.

Uwaga. Zmienne: p, q występujące po lewej stronie powyższej tablicy są zdaniowe, po prawej – pseudo-zdaniowe.

To przyporządkowanie terminów logicznych – arytmetycznym nazywam interpretacją H'.

Oznaczmy przez „$H \cup H'$ sumę (w sensie teorji stosunków) interpretacyj H oraz H'. Okazuje się, że w tej nowej interpretacji przechodzą:

1. Dyrektywy budowania wyrażeń sensownych logiki – w dyrektywy budowania symboli liczb dobrych.

2. Dyrektywy budowy tez prawdziwych logiki – w dyrektywy budowania symboli liczby 50.
3. Aksjomaty teorji dedukcji, teorji kwantyfikatorów, teorji indywiduów w symbole liczby 50.
4. Zdania, przy pomocy których określiłem w sposób nienominalny funkcję „$\hat{n} \square (a, b, c)$," – także w symbole liczby = 50.
5. Fałszywe tezy logiki – w symbole liczby 40.

Wiemy już teraz, że bez narażenia się na sprzeczność wprowadzić można do logiki określenie funkcji „$\hat{n} \square (a, b, c)$". (10).

§ 7. Pozostaje jeszcze jedna sprawa do zreferowania. W jaki sposób przy pomocy uogólnionego wyłączania zdefinjowałem nominalnie pozostałe terminy logiki (uproszczonej)?

Zaznaczam z naciskiem, że nie budowałem definicyj „na oślep", tylko miałem przed sobą pewien wzór, który naśladowałem. Wzorowałem się na układzie definicyj teorji dedukcji opartej na Shefferowskiem wyłączaniu. Przy pomocy Shefferowskiego wyłączania definjuje się negację zdaniową, implikację zdaniową, iloczyn zdaniowy i t. d. Ja zaś przy pomocy uogólnionego wyłączania (którego szczególnym przypadkiem jest wyłączanie Sheffera) zdefinjowałem :

1) uogólnioną negację (której szczególnemi przypadkami są: negacja zdaniowa, uzupełnienie klasy, uzupełnienie indywiduum),

2) uogólnioną inkluzję (której szczególnemi przypadkami są: implikacja zdaniowa, zawieranie się klas, zawieranie się indywiduów),
3) uogólniony iloczyn (którego szczególnemi przypadkami są: iloczyn zdań, iloczyn klas, iloczyn indywiduów).

Podaję teraz explicite moje definicje:

$$\hat{n} - (a, b) \underset{\mathrm{Df}}{=} \hat{n} \square (a, b, b)$$

$$\hat{n} \subset (a, b, c) \underset{\mathrm{Df}}{=} \hat{n} \square (a, b, \hat{m} - (b, b))$$

$$\hat{n} \cap (a, b, c) \underset{\mathrm{Df}}{=} \hat{n} - (a, \hat{m} \square (b, b, c))$$

$$\hat{n} = (a, b, c) \underset{\mathrm{Df}}{=} \hat{n} \cap (a, \hat{m}_1 \subset (b, b, c), \hat{m}_2 \subset (b, c, b))$$

$$\iota\, (p, b) \underset{\mathrm{Df}}{=} \hat{n} = (p, b, \hat{n})$$

$$\hat{n}\varepsilon(p, b, f) \underset{\mathrm{Df}}{=} \hat{n} \subset (p, \iota(p, b), f).$$

Przy pomocy zdań określających uogólnione wyłączanie łatwo dojść do wniosku, że

1. „$\hat{n} \square (p, p, q)$” znaczy: nie $-p$, lub nie $-q$,
2. „$\hat{n} \subset (p, p, q)$” znaczy: jeżeli p, to q,
3. „$\hat{n} \subset (p, \alpha, \beta)$” znaczy: klasa α jest zawarta w klasie β,
4. „$\hat{n} \subset (p, x, y)$” znaczy: indywiduum x jest zawarte w indywiduum y,
5. „$\hat{n} \cap (p, p, q)$” znaczy: p oraz q,
6. „$\hat{n} \cap (\alpha, \alpha, \beta)$” znaczy: iloczyn klas α, β.

7. „$\hat{n} \cap (x, x, y)$" znaczy: iloczyn indywiduów, x, y i t. d.

Na specjalną uwagę zasługuje funkcja „$\hat{n}\varepsilon(p, b, f)$" znaczy to samo, co „$\varphi(x)$", zaś „$\hat{n}\varepsilon(p, \hat{n}, \varphi)$" zastępuje symbol klasowy „$\hat{n}[\varphi\hat{n}]$", pod warunkiem, że przyjmuje się aksjomat ekstensjonalności. (11).

Przypisy

(1) Dr. Alfred Tarski w bardzo interesującej rozprawie p. t. „O wyrazie pierwotnym logistyki" (Przegl. Filozof. 1923) dowiódł, że wszystkie terminy pewnej *części właściwej* całości logiki matematycznej dają się zdefinjować przy pomocy znaku równoważności. Część logiki, do której się redukcja Dra Tarskiego odnosi nazywa się logistyką. Logistyka obejmuje teorję dedukcji i bada wogóle te funkcje zdaniowe, które w naszej interpretacji liczbowej przechodzą w liczby dobre obszaru 0-wego, czyli logistycznego. Dobrze jest zauważyć, że redukcja Dra Tarskiego sprowadza terminy logistyki do jednego terminu pierwotnego logistyki i do *dwu terminów ogólnologicznych*: „$\varphi(u)$" i ogólny kwantyfikator. Przytem Dr. Tarski używa nienominalnych definicyj. Np. pisze

$$Def.\ [p].as(p) \equiv p$$

a nie

$$Def.as = \hat{p}[\hat{p}]$$

Muszę jeszcze zaznaczyć, że definicje w pracy p. Tarskiego są uważane za zdania. Ja zaś nie uważam definicyj za zdania.

(2) Trans. Am. Math. Soc. Vol. XIV.

(3) Jest to wadą systemu Whiteheada–Russella, że nie zawiera on algebry indywiduów, wskutek tego analogje między typami logicznemi nie są należycie uwidocznione, brak na najniższym piętrze odpowiednika teorji klas.

(4) „Zasady Czystej Teorji Typów" (Przegl. Filozof. 1922), str. 361.

(5) „Sur la notion de l'ordre" Fundamenta Mathematicae, 1921.

(6) k jest jednostką dziesiętną $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ przy pewnem n, $k = 10^n$

k jest typem dziesiętnym liczby $n \underset{\mathrm{Df}}{=}$ 1. jeśli $n = 0$, to $k = 10$; oraz 2. jeśli $n \neq 0$, to k jest najmniejszą jednostką dziesiętną z liczb większych od n.

Piszę „$T_{10}(n)$" zamiast „typ dziesiętny liczby n".

Każda liczba całkowita bezwzględna posiada dokładnie jeden typ dziesiętny:

$$k \underset{10}{+} l \underset{\mathrm{Df}}{=} k.\ T_{10}(l) + l$$

$$k \underset{10}{\times} 0 \underset{\mathrm{Df}}{=} 0,\ k \underset{10}{\times} (\operatorname{seq} n) \underset{\mathrm{Df}}{=} (k \underset{10}{\times} n) \underset{10}{+} k.$$

Niech V będzie ciągiem o jednym tylko wyrazie $V(o)$. Niech W będzie ciągiem o induktywnej ilości wyrazów większej od 1. Niech „$W \circ V$" oznacza ciąg, który powstaje przez dołączenie do końca ciągu W jedynego wyrazu ciągu V. Wtedy:

$$\sum_{10} n\left[V(n)\right] = V(o);$$

$$\sum_{10} n\left[W \circ V(n)\right] \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{10} n\left[W(n)\right] \underset{10}{+} V(o).$$

(7) l jest liczbą niepustą typu $(k+1)$-ego, obszaru m-tego $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ istnieje taki ciąg V, że

1. V jest ciągiem o induktywnej ilości wyrazów,
2. V jest ciągiem jednowyrazowym, lub rosnącym (nie-tylko niemalejącym),
3. jeśli u jest wyrazem ciągu V, to, dla wszelkich takich u, albo u jest liczbą pustą typu k-tego, obszaru m-tego, albo u jest liczbą niepustą typu k-tego, obszaru m-tego,
4. $l = 5 \underset{10}{+} \sum_{10} n\left[V(n)\right]$.

(8) Dobrze jest zauważyć, że ciągi są to funkcje jednej zmiennej całkowito-liczbowej. Pojęcie macierzy stosowane często w teorji wyznaczników stanowi analogon do pojęcia ciągu. Macierze są to funkcje dwu zmiennych całkowito--liczbowych, nie zaś jakieś „tablice” (?), jak to się często nawet w bardzo dobrych podręcznikach teorji wyznaczników czyta

(9) Ciągi zbiorotwórcze stanowią arytmetyczne analogon funkcyj zdaniowych.

(10) Przypuśćmy bowiem, że logika (uproszczona) i zdania określające ogólne wyłączanie stanowią układ sprzeczny. W takim razie na gruncie tego układu można dowieść jakiegoś

zdania fałszywego z zakresu logiki. W takim razie można (dzięki interpretacji $H \cup H'$) zbudować symbol arytmetyczny liczby 40, stosując do arytmetycznych symbolów liczby 50 dyrektywy przekształcające arytmetyczne symbole liczby 50 w arytmetyczne symbole tejże liczby. A to jest niemożliwe.

(11) Przedstawiłem zatem *szkicowo* redukcję terminów pierwotnych logiki uproszczonej i ekstensjonalistycznej zarazem. Wydaje mi się, że moją redukcję da się również przeprowadzić w logice nieuproszczonej, lecz ekstensjonalistycznej.

Trudności związane z przyjęciem aksjomatu ekstensjonalności usunął prof. Leśniewski (por. A. Tarski, cyt. praca str. 75).

Uważam logikę ekstensjonalistyczną nie za ogólny system logiki tylko za jeden z wielu interesujących pod-systemów ogólnej logiki. Każdy z takich pod-systemów powstaje przez dołączenie do logiki ogólnej jakiejś hypotezy lub hypotez (np. hypotezy nieskończoności, hypotezy Zermeli, hypotezy ekstensjonalności i t. d.), por. L. Chwistek „The Theory of Constructive types" Cracow 1923–25, str. 50 i następne.

Wobec tego redukcja terminów pierwotnych logiki równie intuicyjna i daleko posunięta, jak moja, oraz dająca się przeprowadzić na gruncie logiki ogólnej byłaby dla mnie czemś znacznie więcej wartościowem.

Alfred Tarski (Warszawa)

Les fondements de la géométrie des corps

(Résumé)

M. Leśniewski a posé, il y a quelques ans, le problème d'établir les fondements d'une *géométrie des corps*, en entendant par ce terme un système de géométrie dépourvu des figures géométriques telles que points, lignes et surfaces et qui n'admette comme figures que les corps – les correspondants intuitifs de ensembles ouverts (resp. fermés) réguliers[1)] de la géométrie euclidienne ordinaire à 3 dimensions; la caractère spécifique d'une telle géométrie des corps – par opposition à toute géométrie „ponctuelle" – se manifesterait en particulier dans la loi, d'après laquelle chaque figure contient une autre figure comme partie proprement dite. – Ce problème est étroitement lié aux

---

1) Ce terme a été introduit par M. Kuratowski dans son ouvrage: *Sur Vopération à de l'Analysis Situs*, Fundamenta Mathematicae III, p. 192–195.

questions discutées dans les ouvrages connus de M. Whitehead sur les fondements des sciences naturelles[2)] et dans le livre de Nicod: *La géométrie dans le monde sensible*[3)].

Dans ce résumé je me propose d'esquisser une solution du problème posé, en omettant par contre la question de son importance philosophique.

Je supposerai ici comme connu le système déductif fondé par M. Leśniewski[4)] et appelé par lui *meréologie*; je vais me servir, en particulier, de la relation *de partie au tout* comme d'une notion connue[5)].

J'admets la notion de *sphère* comme l'unique notion primitive de la géométrie des corps[6)]; à l'aide de cette notion je vais

---

2) *An Enquiry concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambridge 1919; *The Concept of Nature*, Cambridge 1920.

3) Paris, 1924.

4) La première esquisse de ce système a paru dans l'ouvrage: S. Leśniewski, *Podstawy ogólnej teorji mnogości I* (*Les fondements de la Théorie générale des Ensembles I*, en polonais), Moskwa 1916. Cf. de plus du même auteur: O podstawach matematyki (Sur les fondements de la Mathématique, en polonais), Przegląd Filozoficzny (Revue Philosophique), Vol. 30, p. 164–206, et surtout Vol. 31, p. 26–291.

5) Je remplace ici par le mot „*partie*" le terme „*ingredient*", qui embrasse dans le système de M. Leśniewski aussi bien le tout que ses parties proprement dites.

6) En ce qui concerne la géométrie „ponctuelle" tridimensionelle, un mode de la fonder sur la notion de *sphère* comme l'unique notion primitive a été developpé par M. Huntington dans sa note: *A set of postulâtes for abstract geometry exposed in terms of the simple relation of inclusion*, Mathematische Annalen 73, p. 522–559.

définir successivement une série des notions ultérieures, pour parvenir enfin à celles qui me serviront à formuler le système d'axiomes. Voici ces définitions[7]:

Définition 1. *La sphère A est extérieurement tangente à la sphère B, lorsque* 1) *la sphère A est extérieure à la sphère B*[8]*;* 2) *étant données deux sphères X et Y contenant comme partie la sphère A et extérieures à la sphère B, au moins une d'elles est une partie de l'autre.*

Définition 2. *La sphère A est intérieurement tangente à la sphère B, lorsque* 1) *la sphère A est une partie proprement dite de la sphère B;* 2) *étant données deux sphères X et Y contenant comme partie la sphère A et faisant partie de la sphère B, au moins une d'elles est une partie de l'autre.*

Définition 3. *Les sphères A et B sont extérieurement diamétrales à la sphère C, lorsque* 1) *chacune des sphères A et B est extérieurement tangente à la sphère C;* 2) *étant données deux sphères X et Y extérieures à la sphère C et telles que A est une partie de X et B de Y, la sphère X est extérieure à la sphère Y.*

Définition 4. *Les sphères A et B sont intérieurement diamétrales à la sphère C, lorsque* 1) *chacune des sphères A et B est intérieurement tangente à la sphère C;* 2) *étant données deux sphères*

[7] Ce système des définitions comprend des simplifications dont quelques unes, en particulier l'énoncé de la définition 3, sont dues à M. Knaster.

[8] C'est-à-dire, dans la terminologie de M. Leśniewski, les sphères A et B n'ont aucune partie commune.

X et Y extérieures à la sphère C et telles que la sphère A est extérieurement tangente à X et la sphère B à Y, la sphère X est extérieure à la sphère Y.

Définition 5. *La sphère A est concentrique avec la sphère B, lorsque une des conditions suivantes est remplie:* 1) *les sphères A et B sont identiques;* 2) *la sphère A est une partie proprement dite de la sphère B et, de plus, étant données deux sphères X et Y extérieurement diamétrales à A et intérieurement tangentes à B, ces sphères sont intérieurement diamétrales à B;* 3) *la sphère B est une partie proprement dite de la sphère A et, de plus, étant données deux sphères X et Y extérieurement diamétrales à B et intérieurement tangentes à A, ces sphères sont intérieurement diamétrales à A.*

Définition 6. *Point est la classe de toutes les sphères concentriques avec une sphère arbitraire*[9)].

Définition 7. *Les points a et b sont équidistants du point c, lorsqu'il existe une sphère X qui appartient comme élément au point c et qui satisfait en outre à la condition suivante: aucune*

---

9) J'emploie ici partout le terme „*classe*" dans un sens bien différent de celui adopté par M. Leśniewski dans son système mentionné et plutôt conforme à celui des *Principia Mathematica* (Vol. I, 2de édition, Cambridge 1925) de MM. Whitehead et Russel. Ainsi les sphères (resp. les corps) sont traitées ici comme des individus, c.-à-d. objets du rang le plus inférieur, tandis que les points, comme classes de ces sphères, sont des objets du rang supérieur (de second rang).

sphère Y appartenant comme élément au point a ou bien au point b n'est ni partie de X ni extérieure à X.

Définition 8. *Corps est une somme arbitraire de sphères*[10].

Définition 9. *Le point a est intérieur au corps B, lorsqu'il existe une sphère A qui est à la fois un élément du point a et une partie du corps B.*

On sait que toutes les notions de la géométrie euclidienne peuvent être définies à l'aide de celles de *point* et *d'équidistance de deux points d'un troisième*[11]. Par conséquent, en regardant les notions introduites par les définitions 6 et 6 comme des correspondants de leurs homonymes de la géométrie ordinaire, on peut définir dans la géométrie des corps les correspondants de toutes les autres notions de la géométrie „ponctuelle". On peut donc, en particulier, établir le sens de l'expression „*la classe a de points est un ensemble ouvert régulier*"; je me dispense ici de l'énoncé explicite de la définition en question[12].

Après ces définitions préliminaires, je passe à formuler le système d'axiomes suffisant pour construire la géométrie des corps. J'admets en premier lieu le suivant

---

[10] Le terme „*somme*" coïncide ici avec celui d'„ensemble" de la meréologie de M. Leśniewski.

[11] Cf. M. Pieri, *La Geometria Elementare istituita sulle nozione di „punto" e „sfera"*, 1908.

[12] Cf. la note précitée de M. Kuratowski.

Axiome 1. *Les notions de point et d'équidistance de deux points d'un troisième satisfont à tous les axiomes de la géométrie euclidienne ordinaire à 3 dimensions*[13)].

En dehors de cet axiome, qui est d'importance fondamentale, il faut admettre certains axiomes auxiliaires qui rendent notre système cathégorique; les axiomes que j'adopte à ce but établissent une sorte de correspondance entre les notions de *corps* et de *relation de partie au tout* (notions spécifiques de la géométrie des corps) d'une part, et celles *d'ensemble ouvert régidier et de relation d'inclusion* (connues de la géométrie „ponctuelle" ordinaire) d'autre part.

Axiome 2. *Si A est un corps, la classe a de tous les points intérieurs à A est un ensemble ouvert régidier.*

Axiome 3. *Si la classe a de points est un ensemble ouvert régulier, il existe un corps A dont a est la classe de tous les points intérieurs.*

Axiome 4. *A et B étant des corps, si tous les points intérieurs à A sont à la fois intérieurs à B, alors A est une partie de B.*

Le système d'axiomes proposé ci-dessus pourrait probablement être simplifié, en profitant des propriétés spécifiques de la géométrie des corps. A ce propos je me bornerai ici de remarquer que l'axiome 4 peut être remplacé par l'un des deux axiomes suivants:

[13)] Un système d'axiomes de la géométrie ordinaire ne contenant que ces notions comme les seules notions primitives a été établi par M. Pieri dans son livre précité.

Axiome 4'. *Si A est un corps et B une partie de A, alors B est aussi un corps.*

Axiome 4". *Si A est une sphère et B une partie de A, il existe une sphère C qui fait partie de B.*

Sans entrer ici en discussions méthodologiques de ce système d'axiomes, il est à remarquer que *le système en question est cathégorique* (c.-à-d. que toutes deux de ses interprétations sont isomorphes[14)]) et que *la compatibilité des axiomes de ce système équivaut à celle de la géométrie euclidienne ordinaire à 3 dimensions*; la démonstration de ces affirmations ne comporte pas de difficultés notables.

En terminant, lorsqu'on rapproche les résultats qui viennent d'être résumés aux considérations de M. Whitehead et Nicod (l. cit.), il faut constater ce qui suit: Le procédé qui a permis d'obtenir ici les énoncés de définitions et d'axiomes (surtout ceux des définitions 6 et 7 et de l'axiome 1) peut être considéré comme cas particulier de l'ainsi *dite méthode d'abstraction extensive* (*the method of extensive abstraction*) développée par M. Whitehead. Ce fut déjà Nicod qui a attiré l'attention sur l'équivalence des problèmes de compatibilité pour les deux sy-

---

14) D'une façon plus précise, le théorème suivant peut être démontré: *Si deux systèmes satisfont aux axiomes 1–4, on peut établir entre leurs corps (non seulement entre leurs sphères) une correspondance biunivoque vérifiant la condition : pour qu'un corps arbitraire A du premier système fasse partie d'un corps B du même système, il faut et il suffit qu'il en soit de même des corps* A_1 *et* B_1 *qui leur correspondent dans le deuxième système.*

stèmes de géométrie: celui de la géométrie des corps et celui de la géométrie „ponctuelle“ ordinaire. Comme résultat nouveau est par contre à regarder, à mon avis, le mode précis d’établir les fondements mathématiques de la géométrie des corps, à l’aide d’un système cathégorique d’axiomes ne contenant au surplus qu’une seule notion primitive: notion de *sphère*.

S. K. Zaremba (Kraków)

Uwagi nad dowodami zupełnymi

Dowód zupełny nie wykroczył dotąd w rzeczywistości poza dziedzinę czystej teorji. Mówi się o nim wprawdzie dosyć często, ale nie spotykamy go prawie nigdzie. Głównym powodem tego jest zapewne nadmierna długość i zawiłość rozumowań zupełnych. Z tego powodu, jeśli chcemy naprawdę stosować logikę do matematyki, musimy przykładać bardzo wielką wagę do kwestji skracania dowodów bez ujmowania im cech zupełności i zrozumiałości.

Jeżeli dowód zupełny uważać będziemy za ciąg skończony wiążących się w pewien sposób przekształceń, to stanie się rzeczą jasną, iż głównym środkiem do uzyskania skrótów musi być zredukowanie liczby powyższych przekształceń, czyli ogniw rozumowania, przez łączenie kilku z nich razem. Stosując ten proces aż do końca – co jest rzeczą możliwą – osiągnęlibyśmy dowody złożone z jednego tylko ogniwa. Dowody takie byłyby jednak ciężkie i niezrozumiałe a niemal każdy z nich wymagałby skonstruowania ad hoc odpowiedniego twierdzenia logicznego. Można jednak pójść mniej daleko, łącząc ze sobą po kilka przekształceń teorji zdań przy pomocy nowych twierdzeń z tego zakresu. Teorja zdań wysuwa się tu na pierwszy plan, ponieważ lwia część przekształceń, spotykanych w dowodach matematycznych właśnie na niej się opiera.

Przy sposobności układania dowodów zupełnych z zakresu głównie elementów rachunku różniczkowego, które ukażą się częściowo w napisanym przeze mnie dodatku do T. II „Teorji dowodu" prof. Śleszyńskiego, natrafiłem na pewną liczbę prostych twierdzeń z zakresu teorji zdań, które przyczyniają się do upraszczania rozumowań we wspomniany sposób. Obok tego, dość znaczne skróty można uzyskać przez stosowanie rozmaitych odmian klasycznych twierdzeń. W ten sposób udaje się otrzymywać dowody krótsze o połowę lub dwie trzecie od tych, które opierają się jedynie na klasycznych twierdzeniach teorji zdań.

Zygmunt Zawirski (Lwów)

Stosunek logiki do matematyki

Frege i Russell zrealizowali myśl Leibniza o sprowadzeniu matematyki do logiki. Praca ich wymaga jednak pewnych wyjaśnień i uzupełnień. Pojęcia pierwotne matematyki dają się bez reszty sprowadzić do pojęć pierwotnych logiki, ale nie wszystkie aksjomaty matematyczne dają się bez reszty sprowadzić do aksjomatów logiki. Do takich aksjomatów pozalogicznych matematyki należą aksjomat nieskończoności i aksjomat wyboru (multyplikatywny). Należą one do aksjomatów istnienia; nie można jednak dopatrywać się w nich cechy wyróżniającej matematykę od logiki, gdyż aksjomaty istnienia zachodzą także w logice mianowicie: aksjomat użycia zmiennej rzeczywistej, zakładający istnienie przynajmniej jednego przedmiotu i aksjomat sprowadzalności. Wszystkie aksjomaty istnienia zarówno zachodzące w logice jako też zachodzące w matematyce winny być przyjmowane warunkowo (czego autorowie Principiów nie zaznaczyli należycie w odniesieniu do aksjomatu sprowadzalności). Nadto potrzebny jest dowód niesprzeczności przyjmowanych aksjomatów logiki i matematyki czego w Principiach brak.

Poza kierunkiem pracy Russella, na szczególną uwagę zasługuje kierunek symboliczny Hilberta, który nie przywiązuje zbyt wielkiej wagi do rezultatu Russella sprowadzenia pojęć pierwotnych matematyki do pojęć pierwotnych logiki a zmierza przedewszystkiem do wykazania niesprzeczności aksjomatów logiczno-matematycznych. Kierunek ten, jakkolwiek nie docenia trochę wyników prac Russella nie może być jednak traktowany jako zasadniczo niezgodny z kierunkiem Whiteheada i Russella, i raczej przez dowód niesprzeczności aksjomatów logiczno-matematycznych (o ile dowód ten jest bez zarzutu, co na razie nie łatwo ocenić wobec fragmentaryzacji przedstawienia) stanowić może ważne uzupełnienie prac Whiteheada i Russella.

Natomiast kierunek intuicyjny reprezentowany w matematyce przez Brouwera i Weyla, nie uwidocznia na razie głębszej wartości naukowej i słusznie przez Hilberta został skwalifikowany jako „Putschversuch". Trudno też zrozumieć, dlaczego intuicyjnym mieni się kierunek, który ogranicza w matematyce ważność zasady logicznej tak intuicyjnie pewnej i oczywistej, jaką jest zasada wyłączonego środka.

Adolf Lindenbaum (Warszawa)

Méthodes mathématiques dans les recherches sur le système de la théorie de déduction

Dans les recherches „métamathématiques" dont l'objet est la *théorie de déduction* (au sens das „Principia Mathematica"), il y a des problèmes où l'on introduit avec succès des méthodes et des notions de la théorie des ensembles, de l'arithmétique, de la théorie des nombres ou de l'analyse.

Stanisław Jaśkowski (Warszawa): *Teorja dedukcji oparta na dyrektywach założeniowych*.

Jan Łukasiewicz (Warszawa): 1. *Teorja dedukcji* (wyniki badań). 2. *Systemy logik wielowartościowych*.

Dział II. Teorja mnogości i funkcji zmiennej rzeczywistej.

Wacław Sierpiński (Warszawa)

Funkcje a zbiory

Badanie funkcji jest w ścisłym związku z badaniem zbiorów. Jeżeli np. mamy daną funkcję zmiennej rzeczywistej $f(x)$, to jej *obraz geometryczny* jest pewnym zbiorem punktów płaszczyzny. Własności badanej funkcji zależą oczywiście od własności tego zbioru.

Z drugiej strony, badanie zbiorów punktów daje się sprowadzić do badania funkcji. Mając np. dany zbiór Z punktów prostej (osi x-ów), określmy funkcję $f(x)$ zmiennej rzeczywistej x, kładąc $f(x) = 1$ dla liczb x należących do zbioru Z, oraz $f(x) = 0$ dla liczb x nie należących do Z: będzie to t. zw. funkcja charakterystyczna zbioru Z, której badanie jest równoważne badaniu zbioru Z. Funkcja charakterystyczna zbioru płaskiego byłaby oczywiście funkcją dwuch zmiennych rzeczywistych.

Już najprostsze zagadnienia, dotyczące *funkcji ciągłych* doprowadzają do rozważania różnych klas zbiorów.

Mając np. daną funkcję ciągłą $f(x)$ zmiennej rzeczywistej, badamy zbiór jej miejsc zerowych, t. j. zbiór wszystkich tych liczb rzeczywistych x, dla których $f(x) = 0$. Co to jest za zbiór? Jaki warunek jest koniecznym i wystarczającym, aby zbiór Z był zbiorem miejsc zerowych pewnej funkcji ciągłej zm. rzecz.? Zbiory miejsc zerowych funkcji ciągłych, są to *zbiory zamknięte*. Inna własność charakterystyczna zbiorów zamkniętych jest ta, że zawierają wszystkie swe miejsca skupienia, t. j. granice ciągów, których wyrazy zawierają.

Znanem jest z analizy twierdzenie, że funkcja ciągła, określona w przedziale skończonym (wraz z końcami) dosięga w tym przedziale swych kresów. Czy twierdzenie to daje się uogólnić na funkcje ciągłe, określone nie w przedziale z końcami, ale w jakimś zbiorze Z? Wiemy, że nie dla każdego zbioru Z będzie ono słusznem: np. nie będzie już słusznem dla przedziału bez końców. Jakim więc warunkom winien czynić zadość zbiór Z, aby każda funkcja ciągła, określona w zbiorze Z, dosięgała w nim swych kresów? Okazuje się, że na to potrzeba i wystarcza, aby zbiór Z był *ograniczonym i zamkniętym*.

Zbiory ograniczone i zamknięte posiadają ciekawą własność: są wszystkie obrazami ciągłymi jednego zbioru (z pośród nich), np. tak zwanego zbioru doskonałego nigdziegęstego Cantora

Weźmy inne twierdzenie znane z Analizy, np. to, że funkcja ciągła w przedziale, przechodząc od jednej wartości do drugiej, przechodzi przez wszystkie wartości pośrednie. Jakim warunkom winien czynić zadość zbiór Z (np. płaski), aby każda funkcja ciągła w zbiorze Z posiadała tę własność, że jeżeli przyjmuje w zbiorze Z dwie różne wartości, to przyjmuje też w zbiorze

Z każdą wartość pośrednią między niemi? Okazuje się, że na to potrzeba i wystarcza, iżby zbiór Z był *spójny*, t. j żeby nie dał się rozbić na dwie części, z których żadna nie zawiera ani punktów, ani miejsc skupienia drugiej.

Na to, żeby oba wspomniane tutaj twierdzenia analizy były dla zbioru Z słuszne (tw. o kresach i t. zw. tw. Darboux), potrzeba i wystarcza, aby zbiór Z (o ile się nie składa z jednego tylko punktu) był *continuum* (t. j. zbiorem ograniczonym, zamkniętym i spójnym).

Weźmy teraz takie zagadnienie: Jakim warunkom winien czynić zadość zbiór Z, aby z równości w zbiorze Z dwuch funkcji ciągłych zm. rzeczyw. można było wnioskować o ich równości dla wszystkich rzeczywistych x? Okazuje się, że na to potrzeba i wystarcza, żeby zbiór Z był *wszedziegęsty*, t. j. żeby w każdym przedziale leżały punkty zbioru Z.

Mając daną funkcję zmiennej rzeczywistej $f(x)$ możemy badać zbiór jej punktów nieciągłości. Jakie warunki są konieczne i wystarczające na to, żeby dany zbiór Z mógł być zbiorem wszystkich punktów nieciągłości jakiejś funkcji zmiennej rzeczywistej? Okazuje się, że na to potrzeba i wystarcza, żeby zbiór Z był sumą szeregu nieskończonego zbiorów zamkniętych, czyli t. zw. zbiorem F_σ. Wśród zbiorów F_σ również istnieją takie, których obrazy ciągłe dają wszystkie zbiory F_σ.

Różne zagadnienia doprowadzają do badania różnych klas zbiorów, bardziej lub mniej skomplikowanych. To też zaszła potrzeba zrobienia jakiegoś porządku wśród różnych spotykanych zbiorów i wprowadzenia odpowiedniej nomenklatury.

Pierwsze pytanie, które się tu nasuwa, to jest to, zapomocą jakich operacji możemy, wychodząc z pewnych elementarnych zbiorów, otrzymywać zbiory, potrzebne do naszych badań?

Najważniejsze operacje na zbiorach są trzy: *dodawanie zbiorów*, czyli łączenie w jeden zbiór dwuch lub większej liczby zbiorów, *odejmowanie* zbiorów czyli usuwanie z jednego zbioru tych elementów, które należą do drugiego, oraz *mnożenia zbiorów*, czyli tworzenie części wspólnej dwuch lub więcej zbiorów. *Suma* szeregu skończonego lub nieskończonego zbiorów $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$ jest to więc zbiór, zawierający wszystkie elementy każdego ze składników i tylko takie elementy; *iloczyn* ciągu skończonego lub nieskończonego zbiorów $Z_1\, Z_2\, Z_3, \dots$ jest to zbiór, zawierający te i tylko te elementy, które należą do każdego z czynników. *Różnica zbioru* $Z_1 - Z_2$, jest to zbiór, utworzony z tych elementów zbioru Z_1, które nie należą do Z_2.

Mnożenie zbiorów daje się zresztą zawsze sprowadzić do dodawania i odejmowania zbiorów, w myśl tożsamości

$$Z_1\, Z_2\, Z_3 \cdots = Z_1 - \left[(Z_1 - Z_2) + (Z_1 - Z_3) + (Z_1 - Z_4) + \dots\right].$$

Niech R oznacza jakąkolwiek rodzinę zbiorów. Rodzinę wszystkich zbiorów, będących sumami szeregów nieskończonych zbiorów, należących do rodziny R, oznaczamy przez R_σ, zaś rodzinę wszystkich zbiorów, będących iloczynami nieskończonemi zbiorów, należących do rodziny R, oznaczamy przez R_δ. Jasnem jest, co oznaczają symbole $B_{\sigma\delta}$, $R_{\delta\sigma}$, $R_{\sigma\delta\sigma}$ i t. d. Łatwo widzieć, że zawsze $R_{\sigma\sigma} = R_\sigma$ oraz $R_{\delta\delta} = R_\delta$, gdyż każdy ciąg podwójny można, jak wiadomo, ustawić w ciąg zwykły.

Zbiory zamknięte oznaczane są przez F; ich dopełnienia, czyli zbiory otwarte, oznaczane są przez G. Jasnem jest, co oznaczają symbole F_δ, D_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$ i t. d Symboli F_δ i G_σ nie mamy potrzeby wprowadzać, gdyż iloczyn zbiorów zamkniętych jest zawsze zamknięty (zatem $F_\delta = F$) zaś suma zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym (a więc $G_\delta = G$).

Więc np. na to, żeby zbiór Z był zbiorem wszystkich punktów ciągłości jakiejś funkcji zmiennej rzeczywistej, potrzeba i wystarcza, iżby był G_δ. Na to, żeby zbiór był zbiorem wszystkich wartości, które jakaś funkcja ciągła przyjmuje nieskończenie wiele razy, potrzeba i wystarcza, iżby był sumą zbioru G_δ, oraz zbioru skończonego lub przeliczalnego.

Weźmy teraz przykład z teorji funkcji zmiennej zespolonej. Mamy dany szereg potęgowy o skończonym promieniu zbieżności. Co można powiedzieć o zbiorze tych punktów koła zbieżności, w których szereg jest zbieżny? Udowodniono, że jest to zawsze zbiór $F_{\sigma\delta}$; otwartem jednak pozostaje pytanie, czy każdy zbiór $F_{\sigma\delta}$, położony na kole, jest zbiorem wszystkich punktów zbieżności jakiegoś szeregu potęgowego, którego kołem zbieżności jest uważane koło.

Zbiory F, G, F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$ i t. d., przedstawiają najprostsze klasy t. zw. zbiorów Borela. Są to zbiory, które powstają z przedziałów przez stosowanie przeliczalnej ilości dodawań i mnożeń. Klasę wszystkich zbiorów borelowskich można też określić jako najmniejszą klasę K zbiorów, posiadającą następujące dwie własności 1° klasa K zawiera wszystkie przedziały; 2° klasa K

zawiera sumy oraz iloczyny każdego ciągu nieskończonego zbiorów, należących do K.

Jak ogólną jest klasa zbiorów Borela, dowodzi choćby fakt, że wszystkie zbiory, które badano do r. 1905-go, nie wyłączając przykładów na najrozmaitsze osobliwości, były zbiorami Borela. Dopiero w r. 1905-ym Lebesgue zbudował pierwszy przykład zbioru nie-borelowskiego, ale uczynił to przy pomocy liczb pozaskończonych i w sposób nader skomplikowany. To też jeszcze przez kilkanaście lat panowało przekonanie, że wszystkie proste operacje, wykonywane na zbiorach Borela, dają jako wyniki tylko zbiory Borela. Dopiero Suslin w r. 1916 okazał, że tak nie jest, mianowicie, że już rzuty zbiorów G_δ (płaskich) mogą nie być zbiorami Borela. Rzuty zbiorów Borela tworzą nową, obszerniejszą klasę zbiorów, zwanych zbiorami (A), albo analitycznemi. Teorję tych zbiorów rozwinął głównie prof. Łuzin. Jak ogólnemi są zbiory (A), dowodzi choćby fakt, że wszystkie zbiory punktów, które były określane efektywnie aż do chwili zbudowania teorji zbiorów (A), nie wyłączając przykładów zbiorów nie-borelowskich, były bądź zbiorami (A), bądź ich dopełnieniami.

Dziś posiadamy już szereg równoważnych definicji zbiorów (A). Do zbiorów tych doprowadzają różne zagadnienia, dotyczące funkcji ciągłych, lub najprostszych funkcji nieciągłych. Najprostszemi funkcjami po funkcjach ciągłych są funkcje zmiennej rzeczywistej, ciągłe wszędzie conajmniej z jednej strony, np. lewej. Otóż zbiór wszystkich wartości takiej funkcji jest zawsze zbiorem (A), i każdy zbiór (A) (linjowy) jest zbiorem wszystkich wartości pewnej funkcji wszędzie ciągłej ze strony lewej. Co do funkcji ciągłych ze strony lewej, to zauważymy, że przy ich pomocy daje się ustalić odwzorowanie wzajemnie-jednoznaczne pomiędzy punktami odcinka, a punktami kwadratu, czego, jak wiadomo, nie można zrobić zapomocą funkcji ciągłych.

Zbiory (A) są dosyć dobrze zbadane; nie można jednak tego powiedzieć o ich dopełnieniach, czyli t. zw. zbiorach CA. Jednem z nierozstrzygniętych dotąd pytań, dotyczących tych zbiorów, jest pytanie, czy w każdym nieprzeliczalnym zbiorze CA daje się określić funkcja, przybierająca wszystkie wartości rzeczywiste.

W r. 1924 zauważył Łuzin, że istnieją bardzo proste operacje, które, dokonane skończoną liczbę razy na zbiorach Borela, doprowadzają już nie tylko do zbiorów (A) i ich dopełnień, ale do zbiorów znacznie bardziej skomplikowanych. Są to operacje rzutu i dopełnienia.

Przez rzut punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ przestrzeni m-wymiarowej rozumiemy punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ przestrzeni $m-1$ wymiarowej, a więc punkt, otrzymany z danego przez odrzucenie ostatniej jego spółrzędnej. Rzut zbioru jest zbiorem rzutów jego punktów. Przez dopełnienie zbioru Z, leżącego w przestrzeni m-wymiarowej R_m, rozumiemy zbiór $R_m - Z$. Rzut zbioru Z oznaczmy przez PZ, dopełnienie przez CZ. Jasnem jest znaczenie symboli PZ, CPZ, $PCPZ$ i t. d. Zbiory, otrzymywane ze zbiorów zamkniętych przestrzeni o dowolnej, skończonej liczbie wymiarów, przez stosowanie skończonej liczby razy operacji

P i C, nazywamy zbiorami *rzutowymi*. Okazuje się, że zbiory PF są to zbiory F_σ (i naodwrót), CPF są G_δ (i naodwrót), $PCPF$ są zbiorami (A) (i naodwrót). O pewnych ich własnościach będę miał sposobność mówić szczegółowiej w komunikacie sekcyjnym. Jak ogólnymi są zbiory rzutowe, dowodzi fakt, że wszystkie zbiory punktowe, które były efektywnie określone aż do r. 1925-go były zbiorami rzutowymi. Dziś już jednak potrafimy określać efektywnie zbiory punktowe, nie będące rzutowymi.

Zbiory mają zastosowanie nie tylko w teorji funkcji zmiennej rzeczywistej. W dzisiejszej analizie ważną rolę odgrywają funkcje których zmiennymi są zbiory punktów, zaś wartościami – liczby rzeczywiste Są to t. zw. funkcje zbiorów. Wśród nich wyróżniają się *addytywne*, t. j. spełniające warunek $f(Z_1 + Z_2 + \dots) = f(Z_1) + f(Z_2) + \dots$, dla każdego skończonego, względnie nieskończonego szeregu zbiorów, zależnie od tego, czy chodzi o addytywność zwykłą czy też bezwzględną. Do takich funkcji należy np. miara zbioru. Całka sprowadza się, jak wiadomo, do miary: np. całka funkcji zmiennej rzeczywistej jest miarą pewnego zbioru płaskiego, wyznaczonego przez obraz tej funkcji. Do funkcji zbioru dają się też sprowadzić t. zw. funkcje linji, gdzie zmiennemi są funkcje, zaś wartościami liczby rzeczywiste.

Z drugiej strony, przy badaniu zbiorów, funkcje odgrywają nader ważną rolę, zwłaszcza funkcje, których elementami oraz wartościami są punkty (wogóle przestrzeni wielowymiarowej).

O funkcji $f(p)$, określonej dla elementów p danego zbioru

Z, której wartościami $f(p)$ są elementy zbioru F mówimy, że jest różnowartościową, jeżeli zawsze $f(p) \neq f(q)$, dla $p \neq g$.

Jeżeli istnieje funkcja różnowartościowa, określona w zbiorze Z, której zbiorem wartości jest zbiór T, to mówimy, że zbiory Z i T są równej mocy. Jeżeli nadto funkcja ta jest ciągłą w zbiorze Z, zaś jej funkcja odwrotna jest ciągłą w zbiorze Z, to mówimy, że zbiory Z i T są homeomorficzne. Stąd już widać, jak ważną rolę odgrywa pojęcie funkcji zarówno w ogólnej teorji mnogości (w teorji mocy), jak również w topologji, która zajmuje się badaniem własności zbiorów, które są niezmiennikami przekształceń homeomorficznych.

Ważną rolę odgrywają też w różnych badaniach funkcje, które *zbiorom* przyporządkowywują *zbiory*. Każda operacja na zbiorach jest taką właśnie funkcją: np. rzut zbioru, dopełnienie zbioru, zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru i t. p. W pewnych badaniach spotykamy też funkcje, które *liczbom rzeczywistym* przyporządkowywują *zbiory*. Prosty przykład takiej funkcji otrzymujemy, przecinając dany zbiór płaski Z prostemi równoległemi do osi y-ów Każdej liczbie rzeczywistej x odpowiada tu zbiór wszystkich punktów zbioru Z o odciętej x. W ostatnich czasach badano też funkcje, które *rodzinom zbiorów* przyporządkowywują rodziny zbiorów. Przykładami takich funkcji są np. $f(R) = R_\sigma$, $f(R) = R_\delta$.

Wacław Sierpiński (Warszawa)

O pewnych własnościach zbiorów rzutowych

1. Definicja zbiorów rzutowych.
2. Zbiór H.
3. Zbiory H_n.
4. Iloczyny zbiorów P_n.
5. Operacja A na zbiorach CA.
6. Własność Baire'a a zbiory P_2.
7. Zbiory doskonale mierzalne w znaczeniu węższem.
8. Mierzalność (L) zbiorów rzutowych a krzywa Peano.
9. Tw. Hurewicza. Zbiory doskonale mierzalne B.
10. Sito. Zbiory przesiane przez sito.
11. Zbiory $\pi(E)$ i $\mu(E)$.

Podam tutaj przedewszystkiem definicję zbiorów rzutowych, odbiegającą cokolwiek od oryginalnej definicji prof. Łuzina. Różnica będzie polegała na tem, że w definicji, którą podam, wyeliminowane będą zbiory mierzalne B, stanowiące w definicji Łuzina punkt wyjścia.

Niech $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ oznacza punkt w przestrzeni euklidesowej m-wymiarowej $(m > 1)$. Przez *rzut* tego punktu będziemy rozumieli punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ przestrzeni $(m-1)$-wymiarowej. Przez rzut zbioru, położonego w przestrzeni m-wymiarowej, rozumieć będziemy zbiór rzutów wszystkich jego punktów. Rzut zbioru E oznaczać będziemy przez $P(E)$, dopełnienie zaś zbioru E (względem tej przestrzeni, w której leży) – przez $C(E)$. *Rzut* i *dopełnienie*: P i C, będą to dwie operacje elementarne.

Zbiorami rzutowymi nazywamy zbiory przestrzeni o dowolnej (skończonej) liczbie wymiarów, które dadzą się otrzymać ze zbiorów zamkniętych (przestrzeni o dowolnej większej liczbie wymiarów) przez stosowanie skończoną liczbę razy operacji rzutu i dopełnienia.

Rozpatrzmy nieco bliżej klasy zbiorów, które w ten sposób stopniowo otrzymujemy.

Jeżeli przez F oznaczać będziemy zbiory zamknięte przestrzeni m-wymiarowej, to, jak to łatwo można okazać, rodzina zbiorów $P(F)$ pokrywa się z rodziną zbiorów F_σ. Godnem uwagi jest, że każdy zbiór $P(F)$ jest obrazem ciągłym tego samego zbioru zamkniętego linjowego, który otrzymamy, umieszczając w każdym z przedziałów o końcach, będących kolejnemi liczbami całkowitemi, znany zbiór doskonały nigdziegęsty Cantora.

Zbiory $CP(F)$ są to oczywiście zbiory G_δ (i naodwrót).

Zbiory $PCP(F)$ są to więc rzuty zbiorów G_δ, czyli zbiory (A) (analityczne) (i naodwrót).

U Łuzina punktem wyjścia są zbiory Borela – będziemy je oznaczali przez B. *Pierwszą* klasę zbiorów rzutowych stanowią u Łuzina zbiory $P(B)$ oraz $CP(B)$, a więc zbiory (A), oraz ich dopełnienia.

Jak wiadomo, każdy zbiór (A) (w przestrzeni m-wymiarowej) jest obrazem ciągłym tego samego zbioru (linjowego), mianowicie zbioru wszystkich liczb niewymiernych. Nowy wynik, który otrzymałem, jest ten, że każdy zbiór $C(A)$ jest obrazem ciągłym tego samego zbioru $C(A)$ linjowego, H. Możnaby podać efektywną, arytmetyczną definicję zbioru H. Zbiór H oczywiście nie może być zbiorem (A), gdyż każdy obraz ciągły zbioru (A) jest zbiorem (A), zaś wśród zbiorów $C(A)$ istnieją jak wiadomo, takie, które nie są zbiorami (A). Zbiór CH jest więc przykładem zbioru (A), którego dopełnienie nie jest zbiorem (A), skąd wynika, jak wiadomo, że zbiór ten nie jest mierzalny B. Zbiór H posiada jeszcze inną ciekawą własność: jego obrazy ciągłe pokrywają się z rzutami zbiorów CA, czyli ze zbiorami $PCPCP(F)$.

Dla udogodnienia, wprowadzimy dalej następujące oznaczenia. Przez P_0 oznaczać będziemy zbiory F_σ, przez C_0 -zbiory G_δ. Określimy, dalej, przez indukcję, zbiory P_n i C_n (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Przez P_n będziemy rozumieli zbiory $P(C_{n-1})$, zaś przez C_n zbiory $C(P_{n-1})$. Zatem P_1 będą to zbiory (A), C_1 – ich dopełnienia, P_2 – rzuty dopełnień zbiorów (A). Zbiory P_n oraz C_n, które nie są P_{n-1} ani C_{n-1}, tworzą n-tą klasę zbiorów rzutowych Łuzina

Uogólniając wspomniany wyżej wynik, dotyczący zbioru H, udowodniłem, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje zbiór linjowy H_n, będący zbiorem C_{n-1}, takim, iż zbiory P_n pokrywają się z obrazami ciągłemi zbioru H_n.

Z definicji zbiorów P_1, wynika, że suma oraz iloczyn przeliczalnej mnogości zbiorów P_1, jest zbiorem P_1. Natomiast otwartem pozostawało pytanie, czy podobną własność posiadają sumy, oraz iloczyny zbiorów P_n (dla $n = 2, 3, \ldots$). Otóż udowodniłem, że suma oraz iloczyn przeliczalnej mnogości zbiorów P_n jest zbiorem P_n (dla $n \geq 1$). Wynika stąd, że jeżeli na zbiorach rzutowych klasy $\leq n$ Łuzina wykonamy skończoną lub przeliczalną mnogość dodawań, odejmowań, lub mnożeń zbiorów, to otrzymamy zbiory, będące klasy conajwyżej $n+1$ (jednocześnie P_{n+1} i C_{n+1}). Wynika stąd też. że wynik tak zwanej operacji (A), dokonanej na zbiorach P_n, jest zawsze zbiorem P_n. W szczególności więc wynik operacji (A), dokonanej na zbiorach CA, jest zbiorem P_2. Ważnem byłoby zbadanie, czy naodwrót, każdy zbiór P_2 jest wynikiem operacji (A) na zbiorach CA. Gdyby bowiem tak było, to wynikałoby stąd, że każdy zbiór P_2 (a więc też każdy zbiór rzutowy klasy 2 Łuzina) jest mierzalny (L), oraz spełnia warunek Baire'a. Pytania te nie są dotąd, jak wiadomo, rozstrzygnięte, a prof. Łuzin jest zdania, że nigdy nie będą rozstrzygnięte. Dla rozstrzygnięcia pytania, czy każdy zbiór P_1 jest wynikiem operacji (A) na zbiorach CA, wystarczałoby rozstrzygnąć, czy tak zwany zbiór płaski uniwersalny P_2 posiada tę własność (Uniwersalnym (płaskim) zbiorem P_2 nazywamy taki płaski zbiór P_2, którego przecięcia równoległemi do osi y-ów dają wszystkie zbiory P_2 linjowe. Można udowodnić, że istnieją zbiory P_n oraz C_n uniwersalne, dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Co do własności Baire'a, to zbudowałem efektywnie zbiór P_2 liniowy Z taki, że zagadnienie, czy każdy linjowy zbiór rzutowy klasy 2 Łuzina posiada własność Baire'a, jest równoważne pytaniu, czy zbiór Z posiada własność Baire'a.

P. Nikodym nazywa doskonale mierzalnymi w znaczeniu węższem zbiory, których wszystkie obrazy ciągłe są mierzalne (L). Otóż łatwo widzieć, że pytanie, czy każdy zbiór P_2 jest doskonale mierzalny w znaczeniu węższem, jest równoważne pytaniu czy zbiór H_2 jest doskonale mierzalny w znaczeniu węższem. Istnieje więc przykład efektywny, arytmetyczny, zbioru, co do którego nie jesteśmy w stanie, a (według Łuzina – nigdy nie będziemy w stanie) rozstrzygnąć, czy jest doskonale mierzalny w znaczeniu węższem.

Zbiory P_2 są, jak wiadomo, sumami $\aleph_1$, zbiorów Borela: nie wiadomo jednak, czy są one też iloczynami $\aleph_1$ zbiorów Borela. I to pytanie sprowadza się do pytania, czy pewien efektywny zbiór P_2 jest sumą $\aleph_1$ zbiorów Borela.

Co do mierzalności (L) zbiorów rzutowych klasy 2-giej, to nasuwa się tu jeszcze takie pytanie: Czy wystarczy udowodnić mierzalność (L) zbiorów rzutowych 2-giej klasy *linjowych*, czy też trzeba przeprowadzać dowód osobno dla zbiorów linjowych, osobno dla płaskich, dla przestrzennych, i t. d. Otóż udowodniłem, że gdyby się dowiodło, że wszystkie zbiory rzutowe 2-giej klasy linjowe są mierzalne L, to stąd już będzie wynikało, że wszystkie zbiory rzutowe klasy 2-giej w przestrzeni m-wymiarowej są mierzalne L. Dowód opiera się na pewnej elementarnej, ale, zdaje się nie znanej dotąd własności krzywej ciągłej Peano, wypełniającej kwadrat (tej, którą się otrzymuje przez kolejne dzielenie kwadratu, względnie odcinka, na $9, 9^2, 9^3$ i t. d. równych części). Mianowicie, jeżeli Z jest dowolnym zbiorem punktów przedziału $(0,1)$, który krzywa Peano przekształca na zbiór płaski T (punktów kwadratu), to miara zewnętrzna (względnie wewnętrzna) linjowa zbioru Z jest równa mierze zewnętrznej (względnie wewnętrznej) powierzchniowej zbioru T.

Jak już wspomniałem, istnieje zbiór linjowy G_δ (np. zbiór wszystkich liczb niewymiernych) którego obrazy ciągłe dają wszystkie zbiory (A). Otóż nasuwa się pytanie, które ze zbiorów G_δ linjowych posiadają jeszcze tę samą własność. Udowodniłem, że na to iżby obrazy ciągłe zbioru G_δ linjowego dawały wszystkie zbiory (A), potrzeba i wystarcza, iżby zbiór ten nie był F_σ. Wyniku tego nie ogłaszałem drukiem, gdyż dowiedziałem się, że p. Dr. W. Hurewicz ma wynik jeszcze mocniejszy, mianowicie, że odwzorowania ciągłe wzoru (A), nie będącego F_σ dają wszystkie zbiory (A). Jeżeli więc nazwiemy zbiorami doskonale mierzalnymi B te, których wszystkie obrazy ciągłe są mierzalne B, to z pośród zbiorów linjowych jedynemi zbiorami doskonale mierzalnymi B są zbiory F_σ. Ciekawą rzeczą byłoby zbadanie, które ze zbiorów CA posiadają tę własność, że ich odwzorowania ciągłe dają wszystkie zbiory P_2. Czy wystarczy tu może, żeby zbiór CA nie był mierzalny B?

Prócz rzutu jest jeszcze inna operacja, która doprowadza do zbiorów rzutowych: jest to operacja *przesiewania zbiorów przez sito* (crible) Łuzina. Ujmiemy rzecz tę cokolwiek ogólniej, niż Łuzin.

Dla każdego zbioru E, leżącego w pół-płaszczyźnie $y > 0$ oznaczmy przez $K(E)$, i nazwijmy zbiorem *przesianym przez sito* E, zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, takich, iż prostopadła, wystawiona w punkcie x do osi odciętych, trafia zbiór E w zbiorze punktów, który *nie* jest dobrze uporządkowany według wzrastających rzędnych.

Okazuje się, że zbiory (A) (linjowe) pokrywają się ze zbiorami $K(F)$. Udowodniłem też, że jeżeli E jest zbiorem P_n (płaskim), to $K(E)$ jest zbiorem P_n (linjowym), oraz że zbiory P_n linjowe pokrywają się ze zbiorami $K(C_{n-1})$.

Wspomnę wreszcie o pewnym wyniku, dotyczącym zbioru $\pi(E)$ tych liczb a, dla których prosta $x = a$ trafia zbiór płaski E w zbiorze punktów zawierającym podmnogość doskonałą. Łuzin dowiódł, że jeżeli E jest zbiorem CA, to $\pi(E)$ jest zbiorem P_2. Otóż można okazać, że każdy zbiór P_2 linjowy jest zbiorem $\pi(E)$, gdzie E jest pewnym (odpowiednio dobranym) zbiorem CA (płaskim). W związku z tym wynikiem wyłania się następujące zagadnienie.

Oznaczmy przez $\mu(E)$ zbiór wszystkich liczb a, dla których prosta $x = a$ trafia zbiór płaski E w nieprzeliczalnej mnogości punktów. Łuzin udowodnił, że jeżeli zbiór E jest CA, to zbiór

$\mu(E)$ jest C_3, przyczem metoda Łuzina nie daje na $\mu(E)$ niższej klasy. Gdyby się okazało, że jeżeli zbiór E jest CA, to zbiór $\mu(E)$ może nie być to wynikałoby stąd istnienie zbiorów CA nieprzeliczalnych, niezawierających podmnogości doskonałej.

Alfred Tarski (Warszawa)

Geschichtliche Entwicklung und gegenwärtiger Zustand der Gleichmächtigkeitstheorie und der Kardinalzahlarithmetik

Die Theorie der Gleichmächtigkeit und der Kardinalzahlen besitzt trotz ihrer kurzeń, denn kaum fünfzigjährigen Existenz eine interessante und charakteristische Entwicklungsgeschichte.

Diese Theorie bildet bekanntlich einen wichtigen Teil einer umfassenden mathematisechen Disziplin – der Mengenlehre. Sie verdankt ihre Entstehung, wie überhaupt die ganze Mengentheorie, einem eiiizigen Forscher – Georg Cantor. In seinen bekannten Arbeiten von den Jahren 1874–1897[1)] hat bereits Can-

[1)] Angesichts einer ausführlichen Bibliographie der abstrakten Mengenlehre, die in dem neuen Buch von A. Fränkel: *Einleitung in die Mengenlehre*, $^{\text{te}}$ Auflage, Berlin 198, S. 391–417, sich befindet, wird in diesem Artikel von genaueren Zitaten abgesehen.

tor sämmtliche Grundbegriffe dieser Theorie eingeführt, sowie eine Reihe der Fundamentalsätze aus diesem Gebiete begründet oder zum wenigsten formuliert. Das Cantor'sche Werk wurde von seinen Schülern und Nachfolgern – den Herren F. Bernstein, Hessenberg, J. König, Russell, Whitehead, Zermelo u. a. – in intensiver Weise fortgeführt. In zahlreichen Abhandlungen aus den ersten Jahren des laufenden Jahrhunderts, wobei an ersten Stelle die Dissertation von Hrn Bernstein zu erwähnen ist, haben die genannten Autoren nicht nur Beweise für mehrere von Cantor aufgestellten Sätze geliefert, sondern auch viele neue Resultate mehr oder weniger allgemeiner Natur erreicht, grösstenteils unter Verwendung sinnreicher Methoden und subtiler Schlüsse.

Als Angelpunkt für die Entwicklung der Gleichmächtigkeitstheorie ist das Jahr 1904 zu nennen, in welchem von Hrn Zermelo zum ersten Male das Auswahlaxiom explicite formuliert und zum Beweise des berühmten Wohlordnungssatzes herangezogen wurde. Infolge dieses Satzes reduziert sich wie bekannt die ganze Arithmetik der unendlichen Kardinalzahlen auf einen ihrer Abschnitte, nämlich auf die Theorie der sog. Alefs, d. i. der Kardinalzahlen der wohlgeordneten Mengen. In Verbindung mit gewissen weitgehenden. noch von Cantor formulierten und etwas später in den Hessenberg'schen *Grundbegriffen der Mengenlehre* (1906) begründeten Alefsätzen, bewirkt diese Tatsache, dass ganze Teile der Theorie (Probleme der Vergleichbarkeit, Addition, Subtraktion und Multiplikation einer endlichen Faktorenanzahl der Kardinalzahlen) fast trivial und irgendwelcher interessanten Momente beraubt werden. Gewisse Fragen (in erster Linie Potenzierung der Kardinalzahlen betreffend), die nach wie vor unentschieden bleiben, erweisen sich dagegen so schwierig, dass man bis heute noch nicht im Besitze von Methoden ist, die einen wesentlichen Schritt zu ihrer Beherrschung ermöglichen würden. So hat denn für Mathematiker, die ohne Vorbehalt das Auswahlaxiom angenommen haben (und als solche waren und sind auch heute die meisten Forscher auf dem Gebiete der Mengenlehre zu bezeichnen), die Kardinalzahlarithmetik seit dem Erscheinen der genannten Resultate von Herren Zermelo und Hessenberg jede Anziehungskraft als Forschungsbereich verloren. Es lässt sich in der Tat in den nachfolgenden Jahren ein Stillstand in der Fortwicklung der betrachteten Theorie wahrnehmen; die wenigen Arbeiten, die zu verzeichnen sind, bilden fast ausschliesslich geringere Beiträge, die schon bekanntes in anderer Weise darstellen oder vervollständigen. Wenn man trotzdem diese Periode nicht als fruchtlos für das uns interessierende Gebiet bezeichnen darf, so liegt das nur daran, dass damit gleichzeitig eine logische Vertiefung und festere Fundierung der Grundlagen der Mathematik, namentlich der Mengenlehre mitsamt der Gleichmächtigkeitstheorie intensiv betrieben wird: es genügt in dieser Beziehung auf die bekannte Abhandlung von Hrn Zermelo (aus dem Jahre 1908) und auf das grosse Werk von den Herren Whitehead und Russell: *Principia Mathematica* (1912–1913) hinzuweisen.

Erst in den letzten Jahren ist die Forschungsarbeit auf unserem Gebiete in ein lebhafteres Tempo getreten. Es tritt hier eine Mitwirkung verschiedener Faktoren hervor. Durch eine wachsende Opposition gegen uneingeschränkten Gebrauch des Auswahlaxioms wird man vor allem dazu geführt, eine scharfe Grenze zwischen denjenigen Ergebnissen, die dieses Axioms bedürfen, und den übrigen zu ziehen, was insbesondere Untersuehungen über die Rolle des Auswahlaxioms bei der Begründung einzelner Resultate mit sich bringt. Von diesem Standpunkte aus kann als Beginn dieser neuesten Periode die bekannte Arbeit über das Auswahlaxiom vou Hrn Sierpiński aus dem Jahre 1919 angesehen werden, obwohl diesbezügliche Untersuchungen auch schon früher unternommen wurden. – Es stellt sich ferner heraus, dass die ohne das Auswahlaxiom gewonnenen Ergebnisse, wenn sich auch meistens bloss Spezialfälle oder leichte Folgerungen aus Theoremen sind, welche dieses Axioms bedürfen, auch für diejenigen Mathematiker Interesse bieten, die sich gegenüber axiomatischen Fragen völlig gleichgültig verhalten: die genannten Ergebnisse sind nämlich oftmals Verallgemeinerungen fähig, deren Anwendungskraft weit über den Rahmen der Kardinalzahlarithmetik und sogar der ganzen Mengenlehre im eigentlichen Sinne des Wortes hinausreicht. – Es scheinen sich schliesslich auch Zugänge zu jenen noch unbewältigten und schwierigsten Problemen der Theorie zu öffnen, die im Vor hergehenden erwähnt wurden.

Im gegenwärtigen Augenblicke entwickelt sich die Theorie der Gleichmächtigkeit und der Kardinalzahlen in einigeu Richtungen, die hier eine kurze Besprechung finden mögen.

Es werden zunächst Untersuchungen geführt, die eine weitmöglichste Begründung des in Frage kommenden Gebietes unter Vermeidung des Auswahlaxioms bezwecken. Diese Untersuchungen greifen in verschiedene Teile der Theorie ein. Die bisher erreichten Resultate sind grösstenteils von spezieller Natur; die weitergehenden unter ihnen betreffen die Vergleichsrelationen zwisehen Kardinalzahlen, die Operationen der Addition und Subtraktion, sowie Eigenschaften der Alefs Auskunft darüber kann in den Lehrbüchern der Mengenlehre von Hrn Sierpiński[2)], wie auch in der gemeiusamen Abhandlung von Hrn Lindenbaum und dem Verfasser: *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles* (1926) gefunden werden.

In einem engen Zusammenhange mit den erwähnten Untersuchungen stehen weitere, die über den Bereich der Gleichmächtigkeitstheorie hinausgehen and die man folgendermassen charakterisieren kann. Indem man diejenigen Beweise einzelner Ergebnisse der Theorie analysiert, die das Auswahlaxiom (oder zum wenigsten den Wohlordnungssatz von Hrn Zermelo) nicht benutzen, sucht man allgemeinere Sätze zu gewinnen, die gewisse Eigenschaften beliebiger, hauptsächlich eineindeutiger Abbildungen betreffen. Diese Sätze ermöglichen ihrerseits weitgehende Verallgemeinerungen jener analysierten Resultate aus der Gleichmächtigkeitstheorie; es treten hier an

---

[2)] Vgl. die neu erachienenen *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, und namentlich *Zarys teorji mnogości* (*Abriss der Mengenlehre*, polnisch), cz. 1[a], wyd. 3[ie], Warszawa 1928.

stelle der Begriffe Gleichmächtigkeit und Kardinalzahl die Begriffe der *Aequivalenz der Mengen in bezug auf eine gegebene Abbildungsklasse* und des *Typus einer solchen Klasse* – also derartige allgemeine Begriffe, die als Spezialfälle die wichtigen und bekannten Begriffe der Gleichmächtigkeit, der Aehnlichkeit geordneter Mengen, der Homöomorphie und der Kongruenz der Punktmengen, bzw. die Begriffe der Kardinalzahl, des Ordnungstypus, des topologischen Typus usw. liefern. Die dadurch gewonnenen Ergebnisse finden oft interessante Anwendung in verschiedenen Teilen der Mengenlehre, wie auch in verwandten Gebieten der Mathematik. In dieser Weise entsteht eine neue Theorie, an Allgemeinheit die Gleichmächtigkeitstheorie weit übertreffend, und zwar die *Aequivalenztheorie der Mengen in bezug auf beliebige Abbildungsklassen*. Heute darf man es wohl als eine empirische Tatsache ansehen, dass sämmtliche bekannten Ergebnisse, welche Vergleichsrelationen zwischen Kardinalzahlen sowie die Verknüpfungen der Addition und Subtraktion betreffen und unabhängig vom Auswahlaxiom begrüdet waren, bloss Spezialfälle von Sätzen dieser neuen Theorie sind.[3)] – In der beschriebenen Richtung bewegen sich die Arbeiten von den Herren Banach, D. König und Kuratow-

---

[3)] Es wird sich dabei nicht immer um ganz beliebige Abbildungsklassen handeln: will mail einzelne Resultate der Gleichmächtigkeitstheorie (etwa den Aequivalenzsatz von Cantor–Bernstein oder den Bernstein'schen Satz über die Division der Kardinalzahlen) verallgemeinern, so muss man den Klassen mehr oder wenig speziellen Eigenschaften, wie z. B. die Grruppeneigenschaft oder die sog. (endliche oder abzählbare) Additivität, zuschreiben.

ski im VI und VIII Bd. der *Fundamenta Mathematicae*. Viele Ergebnisse aus diesem Bereiche sind von Hrn Lindenbaum und dem Verfasser gefunden, aber noch nicht veröffentlicht worden; kurze Mitteilungen darüber findet man in der schon zitierten *Communication*.

Anderer Art sind Untersuchungen, welche eine Klarung der Rolle des Auswahlaxioms in den Beweisen einzelner Sätze der Theorie der Kardinalzahlen zum Ziele haben. Diese heutzutage weit geförderten Untersuchungen haben zu ziemlich unerwarteten Resultaten geführt: Es stellt sich heraus, dass zahlreiche Sätze, die ganz spezielle Folgerungen jenes Axioms zu sein scheinen, sind doch als mit ihm in seiner ganzen Ausdehnung äquivalent erweisen. Gegenwärtig lassen sich in der Kardinalzahlarithmetik nur wenige Sätze angeben, für welche sich nicht eine der beiden Eventualitäten nachweisen liesse: entweder die Unabhängigkeit des Satzes von dem Auswahlaxiom oder seine volle Aequivalenz mit demselben. – Die erste tiefergehende Arbeit aus diesem Bereiche, nämlich die Abhandlung von Hrn Hartogs: *Ueber das Problem der Wohlordnung*, stammt noch aus der frühereren Forschungsperiode, denn aus dem Jahre 1915; weitere Ergebnisse, insbesondere diejenigen des Verfassers, findet man in seiner Abhandlung vom V Bd. der *Fund. Math*. in der *Communication* und in den Lehrbüchern von Hrn Sierpiński.

Auch in denjenigen Teilen der Kardinalzahlarithmetik, die von der heutigen Mathematik mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht genügend beherrscht werden können, nämlich in der Theorie der Potenzen und der unendlichen Produkte der Kardinalzahlen, sind weitere Untersuchungen keineswegs eingestellt worden. In der letzten Zeit sind hier sogar teilweise neue Resultate zu Tage gekommen, worunter grössere Aufmerksamkeit wohl dasjenige verdient, nach welchem jede unendliche Multiplikation der Alefs auf Potenzierung zurückgeführt werden kann. Die Mehrzahl dieser, an frühere Forschungen von den Herren Bernstein, Hausdorff und J. König anknüpfenden Resultate ist in dem Artikel des Verfassers vom VII Bd. der *Fund. Math.* enthalten. Ergänzungen finden sich in der *Communication*.

Eng verknüpft mit den soeben charakterisierten Untersuchungen ist eine weitere Forschungsrichtung in dem uns interessierenden Gebiete. Ihr Zweck ist eine Annäherung an jene schwierigsten, schon einige Male erwähnten Probleme der Kardinalzahlarithmetik, eine Aufklärung ihrer logischen Zusammenhänge und ihrer Bedeutung für die gesammte Theorie. Unter diesen Problemen nehmen bekanntlich die *Hypothese des Kontinuums* und namentlich ihre Verallgemeinerung, die sog. Cantor'sche Alefhypothese den ersten Rang ein. Das in dieser Richtung erzielte Hauptresultat lässt sich in folgender Weise charakterisieren: Die Cantor'sche Alefhypothese besitzt die gleiche Bedeutung für die Theorie der Potenzierung, wie das Auswahlaxiom für andere Teile des betrachtenden Gebiets – die Annahme dieser Hypothese würde eine Entscheidung für sämtliche interessanten Probleme der Potenzierung mit sich bringen und damit diesen Abschnitt der Theorie trivial machen.

Von einem gewissen Standpunkte aus (indem man nämlich von Existenzialproblemen, die weiter unten eine Besprechung finden werden, absieht) würde also eine positive Entscheidung dieser Hypothese zugleich eine definitive Vollendung des ganzen Gebäudes der Kardinalzahlarithmetik bedeuten. Eine Aufmerksamkeit verdienen überdies die engen logischen Zusammenhänge, die zwischen der betrachteten Hypothese und dem Auswahlaxiom bestehen: das Auswablaxiom erscheint als einfache Folgerung der Cantor'schen Hypothese in einer ihrer bekannten Formulierungen. – Nähere Auskunft über diese Fragen wird in den zuletzt zitierten Arbeiten gegeben; vgl. ferner die Abhandlung von Hrn Baer im 29 Bd. der *Mathematischen Zeitschrift*. evntl. auch die Artikeln des Verfassers im XII und XIV Bd der *Fund. Math.*

Einer Erwähnung bedarf noch eine letzte Gruppe von bis jetzt unentschiedenen Problemen der Gleichmächtigkeitstheorie: es sind diejenigen, welche die Existenz von hinreichend grossen unendlichen Kardinalzahlen betreffen. Diese Probleme sind im Gegensatz zu allen oben besprochenen in hohem Masse von den spezifischen Eigenschaften desjenigen Systems der Mengenlehre abhängig, welches den Betrachtungen zugrunde gelegt wurde: während in einem System, wie z. B. in den *Principia Mathematica*, sogar die Existenz einer einzigen unendlichen Kardinalzahl weder behauptet noch verneint werden kann, wird auf Grund eines anderen Systems, etwa des Zermelo–Fraenkel'schen, erst die Existenz jener „exorbitanten Grössen" von Hrn Hausdorff. d. i. der regulären Alefs mit Limesindices, zweifelhaft. Die bis jetzt wenig geförderte Behandlung dieser Fragen hat fast keine Berührungspunkte mit anderen Betrachtungen aus dem Gebiete der Kardinalzahlarithmetik zu Tage gebracht, dafür steht sie in einem engen Zusammenhange mit den methodischen Forschungen über die Grundlagen der Mengenlehre und ihrer einzelnen Teile. Von den hier bis jetzt erreichten Ergebnissen verdient vielleicht die Feststellung der Unabhängigkeit der einzelnen Existenz- problemen von den benutzten Systemen der Mengenlehre hervorgehoben zu werden. Man vergleiche in dieser Beziehung den Bericht über den Vortrag von Hrn Kuratowski in *Ann. Soc. Pol. Math.* III und die oben zitierte Arbeit von Hrn Baer, ferner auch *Communication* (§ 4).

Zum Abschluss mögen einige Worte den Zukunftsaussichten gewidmet werden. Man darf wohl hoffen, dass die Theorie der Gleichmächtigkeit und der Kardinalzahlen, einmal aus ihrem Stillstand hinausgerückt, sich fernerhin erfolgreich entwickeln wird und dass die vielseitigen Forschungen der letzten Jahre noch manches interessante Resultat zu Tage fördern werden. Es wäre jedoch unserer Meinung nach verfehlt, diesen Untersuehungen uns allzuviel Hoffnungen gegenüberzustehen; es erscheint recht zweifelhaft, ob sie je eine Entscheidung der grundlegenden und schwierigsten Probleme der betrachteten Theorie (etwa der Kontinuumhypothese) bringen werden. Weitaus wahrscheinlicher scheint (obwohl diese Meinung durch keine zwingende Argumente begründet werden kann) die entgegengesetzte Lösung des Problems zu sein: wir sind geneigt zu verinuten, dass die Forschungen im Gebiete der Metamathematik, die von Hrn Hilbert eingeleitet und in den letzten Jahren von mehreren Gelehrten mit grossem Eifer fortgesetzt werden, in näherer oder fernerer Zukunft zu der Feststellung führen werden, dass die genannten Probleme von den axiomatischen Voraussetzungen, die der heutigen Mengenlehre zugrunde liegen, völlig unabhängig sind.

Adolf Lindenbaum (Warszawa)

O pewnych własnościach metrycznych mnogości punktowych. – Sur certaines propriétés métriques des ensembles de points

On peut généraliser un théorème connu sur les approximations diophantiques comme il suit:

Soient E_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – m espaces métriques (de M. Fréchet) compacts (ou du moins „bedingt kompakt") avec les „distances" $\rho_i(x, y)$; φ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – soient des transformations isométriques des espaces E_i, telles que $\varphi_i(x) \in E$, pour tout x de E_i. Alors à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre entier positif $n(\varepsilon)$ tel que l'on a à la fois (pour $i = 1, 2, \ldots, m$):

$$\rho_i(x_i, \varphi_i^{n(\varepsilon)}(x_i)) < \varepsilon \quad \text{– pour tout } x_i \text{ de } E_i.$$

„φ^k" désigne la k-ième itérée de la fonction φ.

Kazimierz Kuratowski (Lwów)

O continuach stanowiących wspólne ograniczenie dwuch obszarów

Na podstawie prac Schönfliesa, Brouwera, Janiszewskiego, Rosentbala, Knastra, Straszewicza i własnych opisana jest struktura continuów o własności wymienionej w tytule. W szczególności podany jest następujący nowy wynik: jeśli continuum płaskie składa się z dwuch continuów, z których każde jest nieprzywiedlne między każdą parą punktów, należących do różnych składników iloczynu tych continuów, to jest ono wspólnym ograniczeniem dwuch obszarów (przyczem zakłada się, że iloczyn posiada więcej niż jeden składnik).

Rezultaty badań omawianych opublikowane będą w „Fundamenta Mathematicae".

Stanisław Saks (Warszawa)

Remarque sur le théorème de Brouwer–Phragmèn

Le but de cette communication est de prouver une remarque présentant une certaine analogie avec le théorème connu de MM. Phragmèn–Brouwer.

1. Soit E un espace métrique, localement connexe. Convenons de dire qu'un ensemble fermé $F \subset E$ *ne découpe pas régionalement* E si pour chaque domaine (ouvert) connexe $G \subset E$ contenant F, le domaine $G - F$ reste connexe.

La remarque dont il est question s'énonce comme voici:

Si un continu C ne découpe pas régionalement l'espace E, la frontière de C est un continu.

Démonstration. Soit B la frontière de C et supposons que B ne soit pas un continu. On peut poser alors:

$$B = B_1 + B_2, \quad B_1 \times B_2 = 0,$$

B_1, B_2 étant des ensembles fermés et non-vides. Il existe, parsuite, deux ensembles ouverts 0_1, 0_2 tels que

$$B_1 \subset O_1, \quad B_2 \subset O_2, \quad O_1 \times O_2 = 0. \tag{1}$$

Soit

$$O = O_1 + O_2 + I,$$

I désignant l'ensemble des points intérieurs de C.

Soit G la composante de O contenant C. E étant connexe localement, G est un domaine connexe[1)]. On a

$$\begin{aligned} &G - C \subset O_1 + O_2, \quad \text{donc:} \\ &G - C = (G - C).O_1 + (G - C).)_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Comme dans l'entourage de chaque point de $B_1 + B_2$ il y a des points qui n'appartiennent pas à C, il vient:

$$(G - C).O_1 \neq 0 \neq (G - C).O_2.$$

Or, les ensembles $(G - C).0_1$, $(G - C).O_2$ étant, en vertu de (1) séparés, il s'ensuit de (2) que $G - C$ n'est pas connexe, c.-à-d. que C découpe régionalement E.

2. Il s'ensuit de la proposition précédente que, si la notion de la coupure régionale et celle au sens ordinaire sont équivalentes pour les ensembles fermés, l'espace considéré E vérifie le théorème de Phragmèn–Brouwer[2)]. La réciproque, comme M. Kuratow-

---

1) *voir*, p ex. Hahn, *Fund. Math.*, t. 2 (1921), p. 189.

2) j'entends par là que la frontière de chaque continu ne découpant pas E, est un continu.

ski a remarqué, a lieu aussi, si l'espace E est localement connexe et compact. En effet, si E satisfait audit théorème, le produit de deux domaines connexes dont la somme est égale à E est toujours connexe[3]. Supposons donc qu'un ensemble fermé F ne découpe pas E et soit G un domaine connexe contenant F. On a:

$$E = E - F + G \quad \text{et} \quad G - F = (E - F).G,$$

donc $G - F$ est, d'après la proposition précitée, un domaine connexe.

3. Le théorème de Phragmèn–Brouwer est rempli, comme on sait, sur la surface de sphère et dans le plan projectif. M. Mazurkiewicz[4] a montré que ce théorème est valable, dans toute sa généralité, (c.-à-d. aussi pour les continus non-compacts) sur le plan euclidien; la même méthode permet d'obtenir le résultat analogue pour la surface de Moebius. Les quatre surfaces mentionnées sont les seules[5], où le théorème de Phragmèn-Brouwer est vérifié. D'après le § 2, elles sont, à la fois, les seules surfaces où les notions de coupure ordinaire et régionale sont équivalentes.

---

[3] voir: Kuratowski, *Fund. Math.* XIIT, pp. 208–210.

[4] *Fund. Math.* t. III (1922), p. 20.

[5] Le terme „*surface*" est conçu au sens qui lui a été attribué par M. Weyl (*Die Idee der Riemannschen Fläche*. 1913).

Witold Hurewicz (Amsterdam)

O odwzorowaniach ciągłych

Rozpatrujemy odwzorowanie jednoznaczne i ciągłe przestrzeni metrycznej i kompaktycznej R o wymiarze n na przestrzeń R^* o wymiarze n^*:

$$q = f(p) \quad (p \in R;\ q \in R^*)$$

Oznaczając dla dowolnego punktu q przestrzeni R^* przez E_q zbiór wszystkich punktów p przestrzeni R, których obrazem jest punkt q, mamy twierdzenie następujące:

Jeżeli $n^* > n$, istnieje w R^* conajmniej jeden punkt q, dla którego zbiór E_q zawiera $n^* - n + 1$ różnych punktów.

Jeżeli natomiast $n^* < n$, to conajmniej jeden zpośród zbiorów E_q posiada wymiar $\geq n - n^*$.

W szczególnym przypadku $n = 0$, zachodzi również twierdzenie odwrotne:

Każda kompaktyczna przestrzeń m-wymiarowa (m oznacza dowolną liczbę naturalną) *daje się przedstawić jako obraz ciągły i jednoznaczny przestrzeni kompaktycznej* 0*-wymiarowej N,* *w ten sposób, że każdy ze zbiorów E_q składa się z conajwyżej $m+1$ punktów.* Jako zbiór N można przyjąć zbiór linjowy nigdziegęsty Cantora.

Bronisław Knaster (Warszawa)

Sur un continu que tout sous-continu divise

1. Introduction. On dit qu'un ensemble B divise un ensemble connexe A, quand l'ensemble $A - B$ n'est pas connexe[1].

Les problèmes concernant la division des continus par leurs sous-continus ne sont résolus jusqu'à présent qu'en partie. On sait qu'il existe des continus qu'aucuu sous-continu ne divise: tels sont, par exemple, les courbes simples fermées et les continus indécomposables. On peut montrer également que

tout continu de Jordan renferme un sous-continu qui ne le divise pas. (1)

---

[1] Un ensemble E est dit *connexe* (au sens de Lennes–Hausdorff), lorsque les formules $E = M + N$, $M \neq O \neq N$ entraînent $\bar{M}N + M\bar{N} \neq 0$, le symbole $\bar{X}$ désignant d'une façon générale la somme de l'ensemble X et de celui de ses points-limites.

Soient, en effet, B un sous-continu divisant un continu jordanien A et C une composante[2)] arbitraire de $A - B$. Par conséquent, $A - C$ ne divise pas A. Or, $A - C$ est un continu, car C étant un ensemble ouvert dans A[3)], l'ensemble $A - C$ est fermé; d'autre part il est connexe en vertu d'un théorème général[4)].

Le problème s'impose donc s'il en est de-même de tous les continus, quels qu'ils soient[5)]. Je vais donner ici la solution *négative* de ce problème, en définissant (dans l'espace euclidien à 3 dimensions) un continu borné A et démontrant la propriété (P) suivante de ce continu:

B étant un vrai sous continu arbitraire de A qui ne se réduit pas à un point, l'ensemble $A - B$ n'est pas connexe. (P)

Bien entendu, un tel continu A est en raison de (1) nonjordanien.

[2)] = „Komponente" au sens de Hausdorff, c'est-à-dire, tout sous-ensemble connexe qui ne peut être augmenté sans cesser d'être sous-ensemble connexe.

[3)] C. Kuratowski, *Une définition topologique de la ligne de Jordan*, Fund. Math. I, p. 43, th. (6).

[4)] B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II, p. 214, th. X.

[5)] Ce problème fut posé par M. Zarankiewicz et moi en 1926, Fund. Math. VIII, p. 376, probl. 42.

2. Figures auxiliaires. Soient: D un segment rectiligne à extrémités $a(D)$ et $b(D)$, $c(d)$ son point médian, $T(D)$ un triangle isocèle à sommet $c(D)$ situé dans un plan perpendiculaire à D, $H(D)$ la hauteur de $T(D)$, $E(D)$ la somme de deux pyramides ayant $T(D)$ pour base commune et pour sommets respectivement les extrémités de D. Soit enfin $E'(D)$ le polyèdre symétrique à $E(D)$ selon D comme axe de symétrie.

J'appelle *étui* de D l'ensemble

$$F(D) = E(D) + E'(D).$$

Cet ensemble est la première approximation du continu A à construire. Quel que soit D, convenons une fois pour toutes de prendre $\delta H(D) \leq \frac{\delta(D)}{2}$, de façon à avoir

$$\delta F(D) = \delta(D). \tag{2}$$

Soient $R_0(D)$ le rhombe formant l'intersection de $F(D)$ avec le plan $P(D)$ qui passe par $D + H(D)$ et $R_m(D)$ où $m = 1, 2, \ldots$ le rhombe contenu dans $R_0(D)$, concentrique avec lui et ayant les cotés parallèles aux siens, mais 2^m fois plus courts. Considérons l'infinité dénombrable de segments définis comme parties communes des $R_m(D)$ avec les rayons infinis (demi-droites) situés sur $P(D)$, issus de $c(D)$ et faisant avec le rayon $\overrightarrow{c(D), b(D)}$ les angles:

$$\pi\left(\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_1+i_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_1+i_2+\cdots+i_j}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_1+i_2+\cdots+i_j+\cdots+i_m}}\right)$$

où

$$i_j = 0, 1, 2, \ldots \text{ ad inf. } et \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

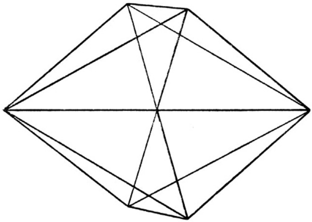
Rangeons tous ces segments en suite infinie

$$D_1^1, L_2^1, \ldots, D_k^1, \ldots \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

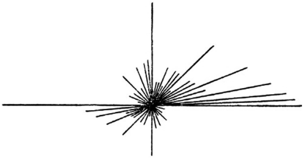
où D_1^1 et D_2^1 en désignent respectivement les plus grands, à savoir les deux moitiés de D à extrémités libres $a(D)$ et $b(D)$ et posons:

$$G(D) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k^1. \tag{4}$$

J'appelle *étoile de centre $c(D)$* le continu $G(D)$ ainsi défini.



Etui



Etoile

Si l'on ordonne tous les segments D_k^1 selon leurs angles décroissants avec D, ils forment un type d'ordre dense; cependant, ceux d'entre eux qui sont déterminés par un $R_m(D)$ donné constituent une suite transfinie du type ω^{m+1}. Comme *le point $c(D)$ divise $G(D)$*, on en déduit facilement que

$$G(D) - c(D) \text{ est formé d'une infinité dènombrable de composantes } D_k^1 - c(D), \text{ dont chacune est, dans sa moitié contigue à } c(D), \text{ composée de points-limites des autres } (D_2^1 \text{ l'est d'ailleurs entièrement}). \tag{5}$$

En désignant respectivement par $a(D_k^1) = c(D)$, $b(D_k^1)$ et $c(D_k^1)$ les extrémités et le point médian de D_k^1, on a donc d'après (5):

$$c(D_k^1) \subset \overline{G(D) - D_k^1}. \tag{6}$$

L'autre propriété essentielle de l'étoile est sa situation dans $F(D)$ qui permet, comme on peut le vérifier géométriquement, d'entourer chacun de ses segments D_k^1 d'un étui $F(D_k^1)$, analogue à $F(D)$, de manière que les conditions suivantes soient remplies:

$$F(D_k^1) \subset F(D) \tag{7}$$

$$F(D_k^1). \sum_{h \neq k} F(D_h^1) = D_k^1. \sum_{h \neq k} D_h^1 = c(D) \tag{8}$$

$$\lim_{j \to \infty} F(D_{k_j}^1) = \lim_{j \to \infty} D_k^1, \text{ pour toute suite de segments } (3). \tag{9}$$

Il suffit à ce but de former d'abord les étuis $F(D_1^1)$ et $F(D_2^1)$, conformes à (2) où $E(D_t^1) \subset E(D)$, $E'(D_t^1) \subset E'(D)$ et $E(D_t^1)$.

$P(D) = D_t^1$ $(t = 1, 2)$, pour pouvoir ensuite entourer d'accord avec (7) tous les autres segments D_k^1 des étuis à $\delta H(D_t^1)$ décroissant assez rapidement pour que les conditions (8) et (9) soient aussi réalisées. Contrairement aux deux premiers étuis, les autres se trouveront nécessairement situés en entier soit dans $E(D)$, soit dans $E'(D)$.

$G(D)$ étant un continu, l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty} F(D_k^1)$ l'est également en vertu de (9). Il formera la seconde approximation du continu A.

3. Définition de l'exemple A. Etant donnés d'une façon générale une figure quelconque I formée de segments rectilignes ayant deux à deux tout au plus une extrémité commune, $F(I)$ la somme de leurs étuis assujettis aux conditions (7)–(9) et $G(I)$ la somme des étoiles construites dans $F(I)$ sur les segments de I, soient:

$$G_0 = D, \dots, \quad F_n = F(G_n), \quad G_n = G(G_{n-1}), \dots \tag{10}$$

Il résulte par induction des définitions des fonctions F et G que de tels F_n et G_n existent pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$, que la suite $\{F_n\}$ est décroissante, la suite $\{G_n\}$ croissante et que l'on a $G_n \subset F_n$. Posons:

$$A = \prod_{n=0}^{\infty} F_n, \tag{11}$$

où, ce qui revient au même en vertu de (2), (7) et (9),

$$A = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} G_n}. \tag{12}$$

4. Propriétés de l'exemple A. Ainsi défini, A est donc un continu. Considérons un segment arbitraire D_k^n de G_n où $n \geq 1$ et désignons

1* par D_k^{n-1} celui des segments de G_{n-1} dont l'étoile $G(D_k^{n-1})$ contient D_k^n.
2* par $D_{l_1}^{n+1}, D_{l_2}^{n+1}, \ldots, D_s^{n+1}, \ldots$ la suite de segments de G_{n+1}, dont se compose l'étoile $G(D_k^n)$.

En vertu de (8),

$c(D_k^n)$ divise A entre tous deux points[6] *dont l'un est situé dans $F(D_{l_s}^{n+1})$ et l'autre en dehors de cet étui.* (13)

Je vais en déduire que

pour tout vrai sous-continu B de A ne se réduisant pas à un point il existe un n et un k tels que $c(D_k^n) \subset B$. (14)

---

[6] c'est-à-dire que ces points appartiennent à deux composantes differentes de $A - c(D_k^n)$.

Soit, en effet, C l'ensemble des centres des étoiles de A. Il s'agit de montrer que $BC \neq 0$.

C étant dénombrable, considérons deux points p et q de $B - C$. Le diamètre maximal des segments de G_n et par conséquent celui de leurs étuis tendant d'après (2) à 0 avec n croissant, il existe un n tel que

$$\rho(p, q) > max\delta F(D_{l_s}^{n+1}). \tag{15}$$

Comme par définition de F_n on a pour tout n: $A = \sum_{k=1}^{\infty} A.F(D_k^n)$ (A est même homéomorphe, sinon semblable, à tout sommande de cette somme) et $A.F(D_k^n) \subset \sum_{s=1}^{\infty} A.F(D_{l_s}^{n+1})$, il existe un k et un l, tels que $p \subset A.\ F(D_{l_s}^{n+1})$, d'où en vertu de (15): $q \subset A - F(D_{l_s}^{n+1})$. Les deux dernières inclusions impliquent selon (13) que $c(D_k^n)$, qui est distinct de p et q, divise A entre ces points; il appartient donc nécessairement au continu B qui les unit.

La propriété (14) étant ainsi démontrée, on en conclut immédiatement que l'ensemble

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c(D_k^n) \tag{16}$$

est dense dans A. En formule:

$$\overline{C} = A. \tag{17}$$

Ceci établi, je passe à la démonstration de la propriété (P) de l'exemple A. Supposons donc à présent qu'un sous-continu

B ne divise pas A. Il s'agit de prouver que l'on aura alors $B = A$, ce qui se réduit en vertu de (17) à montrer que

$$C \subset B. \tag{18}$$

Or

$$\textit{si } c(D_k^n) \subset B, \textit{ on a } \sum_{s=1}^{\infty} c(D_{l_s}^{n+1}) \subset B. \tag{19}$$

En effet, le point $c(D_k^n)$ et, à plus forte raison, son sur-ensemble B divise A d'après (13) entre tous deux points de $G(D_k^n) - B$ situés sur des segments différents de l'étoile $G(D_k^n)$. Il existe donc *tout au plus un seul l, tel que* $D_{l_s}^{n+1} - B \neq 0$. On a par conséquent $G(D_k^n) - D_{l_s}^{n+1}$, d'où $\overline{G(D_k^n) - D_{l_s}^{n+1}} \subset B$. Il en résulte d'une part que $c(D_{l_s}^{n+1}) \subset B$ pour tout $t \neq s$ et d'autre part, en vertu de la propriété (6) de la fonction G, que $c(D_{l_s}^{n+1}) \subset B$.. La démonstration de (19) s'achève par l'addition des deux dernières inclusions.

En appliquant (19) par induction aux points $c(D_{l_s}^{n+1})$ et ainsi de suite, on en déduit que $C.G(D_k^n) \subset B$. Comme C est d'après (14) dense dans tout sous-continu de A, donc en particulier dans $G(D_k^n)$, on a $G(D_k^n) \subset B$, et comme $c(D_k^{n-1}) = a(D_k^n) \subset D_k^n \subset G(D_k^n)$ on conclut que

$$\textit{si } c(D_k^n) \subset B, \textit{ on a } c(D_k^{n-1}) \subset B. \tag{20}$$

En appliquant (20) de proche en proche, on arrive à l'inclusion $c(D^0) = c(D) \subset B$, d'où on conclut, en appliquant (19) par induction suivant la formule (16), que $C \subset B$, c. q. f. d.

Il est à remarquer que la question si un continu A à propriété (P) existe sur le plan reste ouverte.

Włodzimierz Stożek (Lwów)

Über den Fixpunktsatz in der Ebene

Bei jeder stetigen Abbildung eines Quadrates in sich selbst, oder in einen Theil desselben, gibt es einen Fixpunkt[1].

Der Beweis stützt sich auf dem folgenden von Janiszewski[2] stammenden Satze:

Sind im Quadrate zwei abgeschlossene und elementfremde Mengen M und N gegeben und ist A ein Punkt von M und B ein Punkt von N, so gibt es in diesem Quadrate ein Kontinuum K, welches das Quadrat zwischen A und B trennt und mit $M+N$ keinen gemeinsamen Punkt hat.

Beweis des Fixpunktsatzes. Der Voraussetzung gemäss existiert eine stetige Abbildung, welche jedem Punkte $(x y)$ des

---

[1] Beim Verfassen dieser Notiz war mir Herr Kollege Kuratowski behilflich.

[2] Prace Mat. Fiz. T. XXVI und cf: Kuratowski Fund. Math. T. XIII S. 309.

Quadrates Q einen Punkt $(x'y')$ von Q zuordnet. Es soll bewiesen werden, dass es ein Punkt (xy) existiert, für welchen:

$$x = x'$$
$$y = y'$$

Es sei X_1, die Menge der Punkte von Q, für welche $x \leq x'$ und weiter: $X_2(x' \leq x)$, $Y_1(y \leq y')$, $Y_2(y' \leq y)$.

Wir haben also:

$$Q = X_1 + X_2, \tag{1}$$
$$Q = Y_1 + Y_2, \tag{2}$$
$$AB \subset X_1, \quad CD \subset X_2 \tag{3}$$
$$AD \subset Y_1, \quad CB \subset Y_2, \tag{4}$$

wenn das Quadrat Q entsprechend mit $ABCD$ bezeichnet wird. Wir sollen beweisen, dass:

$$X_1 X_2 Y_1 Y_2 \neq 0. \tag{5}$$

Nehmen wir an:

$$X_1 X_2 Y_1 Y_2 = 0.$$

Alsdann wegen (4):

$$\begin{cases} X_1 X_2 Y_2 . AD = 0 \\ X_1 X_2 Y_1 . BC = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Setzen wir:

$$M = X_1 X_2 Y_1 + AD$$
$$N = X_1 X_2 Y_2 + BC.$$

So folgt aus (6):

$$M.N = 0.$$

Es existiert also nach dem erwähnten Satze von Janiszewski ein Kontinuum $K \subset Q$, das A und B trennt und ausserdem:

$$K[X_1 X_2 Y_1 + X_1 X_2 Y_2 + AD + BC] = 0. \tag{7}$$

Da A und B getrennt sind, so ist:

$$K.AB \neq 0, \quad K.CD \neq 0.$$

Aus den letzten Ungleichungen folgt wegen (3):

$$K.X_1 \neq 0, \quad K.X_2 \neq 0.$$

Da K ein Kontinuum ist, so ist wegen (1): $K.X_1 X_2 \neq 0$. Dies wiederspricht aber der Gleichung (7), da einerseits $K[X_1 X_2 Y_1 + X_1 X_2 Y_2] = 0$, anderseits aber aus (2): $X_1 X_2 Y_1 + X_1 X_2 Y_2 = X_1 X_2$.

Stefan Straszewicz (Warszawa)

Z teorji rozcinania przestrzeni

1. Komunikat niniejszy zawiera dwa twierdzenia, będące w ścisłym związku z twierdzeniami, podanemi w pracy S. Mazurkiewicza i S. Straszewicza: „*Sur les coupures de l'espace*” Fundamenta Mathematicae t. IX str. 205.

2. Będziemy oznaczali przez $\varphi(t)$, $f(t, \lambda)$ etc., funkcje zmiennych rzeczywistych $t, \lambda, \ldots$, których wartościami są punkty przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej E.

3. Niech C oznacza krzywą zamkniętą zwykłą w E, zaś $\varphi(t)$ funkcję ciągłą dla $0 \leq t \leq 2\pi$ przyczem $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Jeżeli zbiór punktów $\varphi(t)$ jest identyczny z C to funkcję $\varphi(t)$ nazwiemy przebiegiem krzywej C.

4. Oznaczmy przez C_1 i C_2 dwie krzywe zamknięte zwykłe zawarte w zbiorze M. Powiemy, że krzywa C_1 jest homotopiczna z krzywą C_2 w zbiorze M, co napiszemy $C_1 \sim C_2(M)$, jeżeli istnieją takie przebiegi $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ odpowiednio dla C_1 i C_2 oraz taka funkcja $f(t,\lambda)$, ciągła w obszarze $0 \leq t \leq 2\pi$ $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, że spełnione są warunki:

$$f(t,\lambda) \in M, \quad f(t,\lambda_1) = \varphi_1(t), \quad f(t,\lambda_2) = \varphi_2(t).$$

Jeżeli C_2 redukuje się do punktu, t. j. $\varphi(t) = \text{const.}$, to mówimy, że krzywa C_1 jest homotopiczna zeru w zbiorze M, t. j. $C_1 \sim 0(M)$.

Stosunek homotopji posiada następujące własności:

a) Jeżeli $C \subset M$, to $C \sim C(M)$
b) Jeżeli $C_1 \sim C_2(M)$, to $C_2 \sim C_1(M)$
c) Jeżeli $C_1 \sim C_2(M)$ i $C_2 \sim C_3(M)$ to $C_1 \sim C_3(M)$.

5. Zbiór A kratuje przestrzeń E (jest kratą przestrzeni), jeżeli zbiór $E-A$ zawiera krzywe zamknięte zwykłe nie homotopiczne zeru w $E - A$. Zbiór A, kratujący przestrzeń, nazywa się kratą prostą jeżeli każde dwie krzywe zamknięte zwykłe, leżące w $E - A$ i nie homotopiczne zeru w $E - A$ są homotopiczne ze sobą w $E - A$.

6. Twierdzenie. *Niech A i B oznaczają zbiory domknięte, zaś a, b, c punkty nie należące do $A + B$ i przytem takie, że ani A ani B nie rozcina przestrzeni pomiędzy żadnemi dwoma z pośród tych punktów. Jeżeli AB jest krata prostą, to $A + B$ nie rozcina przestrzeni conajmniej pomiędzy dwoma z pośród punktów a, b, c.*

Dowód powyższego twierdzenia oprzemy na pewnym lemacie z topologji płaszczyzny. Niech Δ oznacza obszar płaski, którego brzeg $F(\Delta)$ jest sumą skończonej liczby krzywych zamkniętych zwykłych C_i, zaś A i B niech będą zbiorami domkniętemi takiemi, że $F(\Delta)$ jest rozłączne z AB, lecz zarówno $C_i A \neq 0$ jak $C_i . B \neq 0$ dla każdego i. Krzywe C_i możemy podzielić zapomocą skończonej liczby punktów p_{ik} na łuki naprzemian rozłączne z A i z B, lecz nierozłączne z $A + B$. Punkty p_{ik} nazwiemy wierzchołkami brzegu $F(\Delta)$.

Lemat wspomniany brzmi: *Jeżeli* $\Delta . AB = 0$, *to dla każdego wierzchołka* p_{ik} *istnieje conajmniej jeden wierzchołek* p_{jl} *(różny od* p_{ik}*) taki, że* $A + B$ *nie rozcina* $\bar{\Delta}$ *między* p_{ik} *i* p_{jl}.

Dowód tego lematu (poza nieistotną różnicą w sformułowaniu) dla wypadku, gdy brzeg składa się z jednej krzywej zamkniętej podałem w § 10 pracy „*Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen*a”, Fundamenta Math. t. VII. Uogólnienie na dowolną liczbę składowych brzegu dokonywa się zapomocą łatwej indukcji.

Przystępując do dowodu twierdzenia, podanego na wstępie tego paragrafu załóżmy, że $A + B$ rozcina przestrzeń między a i c oraz między b i c. Udowodnimy, że wówczas $A + B$ nie rozcina przestrzeni między a i b.

Z założenia wynika, że istnieją łuki proste J_1 i J_2 o końcach a i c takie, że $J_1 A = 0$, $J_2 B = 0$ oraz podobnie łuki K_1 i K_2 o końcach b i c takie, że $K_1 A = 0$, $K_2 B = 0$. Możemy założyć, że łuki J_1 i J_2 a także K_1 i K_2 nie mają prócz swych końców innych punktów wspólnych. W przeciwnym razie moglibyśmy bowiem zapomocą elementarnych konstrukcyj zastąpić te łuki przez inne posiadające wymienione własności. Krzywe zamknięte zwykłe $J_1 + J_2$ i $K_1 + K_2$ oznaczymy odpowiednio przez C_1 i C_2.

Żadna z krzywych C_1 i C_2 nie jest homotopiczna zeru w $E - AB$. Gdyby bowiem było np. $C_1 \sim 0(E - AB)$, to stosując rozumowanie § 6 pracy, cytowanej w § 1 artykułu niniejszego, otrzymalibyśmy wniosek, że $A + B$ nie rozcina przestrzeni między a i c, wbrew przyjętemu założeniu.

W myśl założenia, że AB jest kratą prostą, istnieją zatem przebiegi $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ krzywych C_1 i C_2 oraz funkcja $f(t, \lambda)$ ciągła w obszarze $0 \leq t \leq 2\pi$, $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ dla których mamy

$$f(t, \lambda) \in E - AB, \quad f(t, \lambda_1) = \varphi_1(t), \quad f(t, \lambda_2) = \varphi_2(t).$$

Możemy przyjąć, że $a = f(0, \lambda_1)$, $b = f(0, \lambda_2)$, $c = f(\pi, \lambda_1) = f(\pi, \lambda_2)$

Interpretujmy teraz t i λ jako amplitudę i promień wodzący punkta na płaszczyźnie. Oznaczmy przez A_1, zbiór wszystkich punktów płaszczyzny (t, λ), dla których $f(t, \lambda) \in A$, przez B_1 zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, dla których $f(t, \lambda) \in B$, oraz przez a_1, b_1, c_1, c_2 biegunowych punkty płaszczyzny o współrzędnych $(0, \lambda_1)$, $(0, \lambda_2)$, (π, λ_1), (π, λ_2). Pierścień kołowy, określony przez nierówności $0 \leq t < 2\pi$, $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ oznaczmy przez Δ. Zbiory A_1 i B_2 są wskutek ciągłości $f(t, \lambda)$ domknięte i wobec $f(t, \lambda) \in E - AB$ mamy $\bar{\Delta}.A_1B_1 = 0$. Możemy zatem do obszaru Δ zastosować podany wyżej lemat, przyczem za wierzchołki brzegu Δ obierzemy punkty a_1, b_1, c_1, c_2. W myśl lematu wierzchołek a_1, może być połączony z jednym conajmniej z wierzchołków b_1, c_1, c_2 łukiem prostym, przebiegającym w $\bar{\Delta}$ i rozłącznym z $A_1 + B_1$. Lecz wierzchołkiem tym nie może być ani c_1 ani c_2, gdyż według założenia $A+B$ rozcina przestrzeń między a i c, zatem $A + B$ rozcina $\bar{\Delta}$ między a_1 i c_1 oraz między a_1 i c_2. A zatem jest nim b_1, t. zn. $A_1 + B_1$ nie rozcina $\bar{\Delta}$ między a_1 i b_1. Wobec ciągłości funkcji $f(t, \lambda)$ wynika stąd, że $A + B$ nie rozcina przestrzeni między a i b c. b. d. d.

7. Niech $C = J_1 + J_2$ będzie krzywą zamkniętą zwykłą równą sumie łuków prostych J_1 i J_2 o wspólnych końcach, zaś J_2 niech oznacza łuk prosty, łączący końce J_1 i J_2 i nie posiadający innych punktów wspólnych z C. Będziemy mówili, że J_3 rozkłada C na krzywe cząstkowe $C_1 = J_1 + J_2$ i $C_2 = J_2 + J_3$. Każda z krzywych C_1 i C_2 może być rozłożona z kolei w tensam sposób. Ogólnie możemy mówić o rozkładzie krzywej pierwotnej C na dowolną liczbę krzywych cząstkowych.

8. Lemat. *Niech J_1, J_2, J_3, oznaczają łuki proste o wspólnym początku i wspólnym końcu, nie posiadające innych punktów wspólnych i położone w pewnym zbiorze M. Jeżeli $J_1 + J_2 \sim 0(M)$, to $J_1 + J_3 \sim J_2 + J_3(M)$.*

Lemat ten jest uogólnieniem lematu I-go z pracy cytowanej w § 1 i udowadnia się analogicznie.

9. Twierdzenie. *Niech A i B oznaczają zbiory domknięte, z których żaden nie kratuje przestrzeni, zaś których iloczyn AB kra-*

tuje przestrzeń, lecz nie jest kratą prostą, t. zn. istnieją krzywe zamknięte zwykłe C_1, C_2, nie homotopiczne zeru i nie homotopiczne względem siebie w $E - AB$. *Załóżmy dalej, że krzywe C_1 i C_2 mogą być obrane tak, że przy każdym rozkładzie C_1 i C_2 zapomocą łuków prostych leżących w $E - AB$ istnieje składowa K_1 krzywej C_1 oraz składowa K_2 krzywej C_2 takie, że ani K_1 ani K_2 nie jest homotopiczna zeru oraz K_1 nie jest $\sim K_2$ w $E - AB$.*

Przy tych założeniach zbiór $A + B$ rozcina przestrzeń conajmniej na 3 obszary.

Dowód. Ponieważ C_i nie jest ~ 0 w $E - AB$ więc tembardziej nie jest ~ 0 w $E - A$ i w $E - B$. Ponieważ zaś ani A ani B nie kratuje przestrzeni więc musi być $C_i A \neq 0$ i $C_i B \neq 0$. Wobec tego każdą z krzywych C_i można zapomocą skończonej liczby punktów, które nazwiemy wierzchołkami podzielić na łuki naprzemian rozłączne z A i z B, lecz nierozłączne z $A + B$. Wierzchołki krzywej C_1 następujące po sobie w pewnym zwrocie oznaczmy przez $a_1, a_2, \ldots$ podobnie wierzchołki krzywej C_2 przez $b_1, b_2, \ldots$

Z twierdzenia II pracy cytowanej w § 1 wynika, że wierzchołki a_i a także wierzchołki b_i leżą conajmniej w dwóch obszarach uzupełnienia $A + B$. Przypuśćmy, że wbrew twierdzeniu $A + B$ rozcina przestrzeń tylko na dwa obszary Γ_1 i Γ_2. Możemy wówczas krzywe C_1 i C_2 rozłożyć w sposób następujący. Niech $a_1 \in \Gamma_1$; połączmy a_1 z każdym wierzchołkiem a_k, leżącym w Γ_1 łukiem prostym, położonym również w Γ_1. Możemy łuki te przeprowadzić tak, że parami wzięte mają tylko punkt a_1 wspólny, oraz że oprócz swych końców nie mają innych punktów wspólnych z C_1. W ten sposób krzywa C_1 została rozłożona na krzywe $D_1, D_2, D_3, \ldots$ Każdą z pośród krzywych D_i, która zawiera dwa lub więcej wierzchołki a_i, leżące w Γ_2 rozkładamy dalej, łącząc w podobny sposób jeden z tych wierzchołków z pozostałemi. Otrzymamy wówczas rozkład krzywej C_1 na krzywe $E_1, E_2, \ldots$

Analogicznie rozłożymy krzywą C_2 na krzywe $F_1, F_2, \ldots$

Każda z krzywych E_i lub F_j może być dwojakiego rodzaju: albo jest ona rozłączna z A lub z B i wówczas jest ~ 0 w $E - A$ lub w $E - B$ a więc też w $E - AB$, albo jest sumą 2-ch łuków, z których jeden jest rozłączny z A, drugi jest rozłączny z B i których wspólne końce należą jeden do Γ_1, drugi do Γ_2.

Okażemy, że każde dwie krzywe drugiego typu są homotopiczne między sobą w $E-AB$. Niech np. $E_1 = J_1+J_2$ i $F_1 = K_1+K_2$ oznaczają krzywe zamknięte zwykłe, utworzone z łuków prostych J_1, J_2, K_1, K_2 spełniających założenia:

$$J_1 B = J_2 A = 0 \quad J_1 J_2 = \{a_1\} + \{a_2\} \quad a_1 \in \Gamma_1,\ a_2 \in \Gamma_2$$
$$K_1 B = K_2 A = 0 \quad K_1 K_2 = \{b_1\} + \{b_2\} \quad b_1 \in \Gamma_1,\ b_2 \in \Gamma_2.$$

Połączmy punkty a_1 i b_1 łukiem prostym M, leżącym w Γ_1 i punkty a_2 i b_2 łukiem prostym N, leżącym w Γ_2, tak, aby M i N nie miały oprócz swych końców innych punktów wspólnych z $E_1 + F_1$. Wówczas krzywa $J_1 + K_1 + M + N$ jest homotopiczna zeru w $E - AB$, gdyż jest rozłączna z B. Zatem w myśl lematu § 8 jest

$$E_1 = J_1 + J_2 \sim J_2 + K_1 + M + N \quad (E - AB).$$

Z drugiej strony krzywa $J_2 + K_2 + M + N$ jest homotopiczna zeru w $E - AB$, gdyż jest rozłączna z A, więc na podstawie tegoż lematu

$$F_1 = K_1 + K_2 \sim J_2 + K_1 + M + N \quad (E - AB).$$

Stąd

$$E_1 \sim F_1 \quad (E - AB).$$

Stosując powyższe do krzywych E_i i F_j na jakie rozłożone zostały C_1 i C_2, widzimy, że wszystkie te z nich, które nie są homotopiczne zeru są homotopiczne między sobą w $E - AB$. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem. Przypuszczenie więc, że $A + B$ rozcina przestrzeń tylko na 2 obszary jest błędne c. b. d. d.

Sur la théorie des coupures de l'espace

(Resumé)

1. La communication présente comporte deux théorèmes qui se rattachent aux propositions établies dans l'article de S. Mazurkiewicz et S. Straszewicz „*Sur les coupures de l'espace*" publié dans „Fundamenta Mathematicae" t. IX p. 205.

2. Nous désignerons par $\varphi(t)$, $f(t, \lambda)$, etc. des fonctions des variables réelles $t, \lambda, \ldots$ dont les valeurs sont les points de l'espace euclidien E à trois dimensions.

3. Soit C une courbe simple fermée dans E et $\varphi(t)$ une fonction continue dans $0 \le t \le 2\pi$ et telle que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Si l'ensemble des points $\varphi(t)$ est identique à C nous dirons que $\varphi(t)$ détermine un parcours de C.

4. Soient C_1 et C_2 deux courbes simples fermées et M un ensemble contenant C_1 et C_2. La courbe C_1 sera dite homotope à C_2 dans M, ce qu'on écrira $C_1 \sim C_2(M)$, s'il existe des parcours $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ de C_1 resp. de C, et une fonction $f(t,\lambda)$ continue dans le domaine $0 \le t \le 2\pi$, $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$ telles que

$$f(t,\lambda) \in M, \quad f(t,\lambda_1) = \varphi_1(t), \quad f(t,\lambda_2) = \varphi_2(t).$$

Si C_2 se réduit à un point c.-à d. si $\varphi_2(t) = \text{const.}$, la courbe C_1 sera dite homotope à zéro: $C_1 \sim 0(M)$.

La relation d'homotopie jouit des propriétés suivantes:

a) Si $C \subset M$, alors $C_2 \sim C(M)$.
b) Si $C_1 \sim C_2(M)$, on a aussi $C_2 \sim C_1(M)$.
c) Si $C_1 \sim C_2(M)$ et $C_2 \sim C_3(M)$ alors $C_1 \sim C_3(M)$.

5. Nous dirons qu'un ensemble A est entrelaçable s'il existe des courbes simples fermées non homotopes à zéro dans $E - A$. Un ensemble entrelaçable A sera dit simplement entrelaçable, si toutes les courbes simples fermées non homotopes à zéro dans $E - A$ sont homotopes entre elles dans cet ensemble.

6. Théorème. *Soient A et B deux ensembles fermés et a, b, c des points non appartenant à $A + B$ et tels que ni A ni B ne coupe l'espace entre aucun couple de ces points.*

Si l'ensemble AB est simplement entrelaçable, la somme $A+B$ ne coupe pas l'espace entre deux au moins des points a, b, c.

7. Soit $C = J_1 + J_2$ une courbe simple fermée, somme des arcs simples J_1, J_2 coëxtremaux, et J_3 un arc simple unissant les extrémités de J_1 et J_2 et n'ayant pas avec C d'autres points en commun. Nous dirons que J_3 décompose C en des courbes partielles $C_1 = J_1 + J_3$ et $C_2 = J_2 + J_3$. Chacune des courbes C_1 et C_2, peut être décomposée à son tour et on peut envisager ainsi une décomposition de la courbe primitive en un nombre quelconque de courbes partielles

8. Théorème. *Soient A et B des ensembles fermés non entrelaçables dont le produit AB est entrelaçable mais pas simplement entrelaçable*. Donc il existe dans $E - AB$ deux courbes simples fermées C_1 et C_2, dont aucune n'est homotope à zéro, et qui ne sont pas homotopes entre elles dans $E - AB$. *Supposons en outre que l'on peut choisir ces courbes de telle manière, qu'après toute décomposition de C_1 et C_2 par des arcs situés dans $E - AB$, il se trouve des courbes partielles K_1, K_2 de C_1 resp. C_2 telles que ni K_1 ni K_2 n'est homotope à zéro et que K_1 n'est pas homotope à K_2 dans $E - AB$.*

Dans ces conditions l'ensemble $A + B$ coupe l'espace au moins en trois régions.

9. La démonstration du théorème précédent repose essentiellement sur le lemme suivant, qui présente une généralisation du lemme 1 de l'article cité au § 1.

Lemme. *J_1, J_2, J_3 étant trois arcs simples coëxtrémaux sans autres points communs deux à deux et situés dans un ensemble M, si $J_1 + J_2 \sim 0(M)$, alors $J_1 + J_3 \sim J_2 + J_3(M)$.*

Kazimierz Zarankiewicz (Warszawa)

O pewnej topologicznej własności płaszczyzny

Autor dowodzi twierdzenia: „*Jeżeli na płaszczyźnie euklidesowej dane są trzy ograniczone obszary, z których każdy leży w nieograniczonej składowej uzupełnienia pozostałych, oraz trzy rozłączne kontinua takie, iż każde z nich posiada punkt wspólny z każdym obszarem, wówczas conajmniej jedno kontinuum rozcina conajmniej jeden obszar*".

Następnie autor zdefinjował pojęcie kontinuum zbieżności. Mówimy, że kontinuum K jest kontinuum zbieżności dla zbioru C, jeżeli w C istnieje ciąg kontinuów $K_1, K_2, K_3, \ldots$ taki, że:

$$K_n.K_m = 0 \quad \text{dla } m \neq n$$
$$K.K_n = 0$$
$$K = \operatorname{Lim} K_n \quad \text{(w znaczeniu Hausdorffa).}$$

Wreszcie zostało udowodnione twierdzenie: „*W każdym punkcie kontinuum zbieżności, z wyjątkiem conajwyżej dwuch* *punktów, zbiór $K + \sum K_n$ rozcina lokalnie płaszczyznę na nieskończoną mnogość obszarów*". W związku z tym podane zostało twierdzenie (które może być uważane w pewnym sensie za odwrotne do tw. Jordana): *Kontinuum ograniczone, które w każdym punkcie lokalnie rozcina płaszczyznę dokładnie na dwa obszary, jest krzywą zwykłą zamkniętą*".

Ob. Fund. Math. XI, „Über eine topologische Eigenschaft der Ebene".

Miron Zarycki (Lwów)

Koherencje i adherencje Cantora*

1. Oznaczmy literą C przestrzeń, w której leżą wszystkie rozpatrywane tu zbiory, znak A^c niechaj oznacza dopełnienie zbioru A, zaś A^k jego koherencję (zbiór punktów skupienia zbioru A należących do A).

Zbiór A^k czyni zadość następującym niezależnym od siebie pewnikom:

$$\mathrm{I}_k: \qquad A^k + B^k \subset (A+B)^k;$$

$$\mathrm{II}_k: \qquad A^k \subset A;$$

$$\mathrm{III}_k: \qquad A^{ckck} = A^{kckc}.$$

---

* Ponieważ treść tego referatu była drukowana w Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 30, No. 3. p. t.: Allgemeine Eigenschaften der Cantorschen Kohärenzen, podajemy tu tylko wyniki referatu bez dowodów.

2. Opierając się na tych wzorach można udowodnić następujące ogólne własności pojęcia koherencji:

$$
\begin{array}{ll}
1_k: & \text{Gdy } A \subset B, \text{ to } A^k \subset B^k, \\
2_k: & (AB)^k \subset A^k B^k, \\
3_k: & 0^k = 0, \\
4_k: & C^k = C, \\
5_k: & A^{ck} \subset A^{kc}, \\
6_k: & (A - B)^k \subset A^k - B^k, \\
7_k: & A^{kckk} = A^{ckckck}, \\
8_k: & A^{kkck} = A^{kckckc}.
\end{array}
$$

3. Gdy na dowolnym zbiorze A wykonywać będziemy dowolną skończoną ilość razy operacje A^k i A^c w dowolnym porządku, to każdy otrzymany w ten sposób zbiór będzie identyczny z jednym i tylko jednym ze zbiorów zawartych w następujących tablicach[1]:

[1] Znak $A \to B$ oznacza to samo co $A \subset B$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & A^{ckc} \arrow[r] & A^{ckkc} \arrow[r] & A^{ckkkc} \arrow[r] & \dots \\
A^{k} \arrow[r] \arrow[u] & A^{ckck} \arrow[r] \arrow[u] & A^{ckkck} \arrow[r] \arrow[u] & A^{ckkkck} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
A^{kk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{ckckk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{ckkckk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{ckkkckk} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
A^{kkk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{ckckkk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{ckkckkk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{ckkkckkk} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
\vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A^{c} \arrow[r] & A^{kc} \arrow[r] & A^{kkc} \arrow[r] & A^{kkkc} \arrow[r] & \dots \\
A^{ck} \arrow[r] \arrow[u] & A^{kck} \arrow[r] \arrow[u] & A^{kkck} \arrow[r] \arrow[u] & A^{kkkck} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
A^{ckk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{kckk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{kkckk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{kkkckk} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
A^{ckkk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{kckkk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{kkckkk} \arrow[r] \arrow[u] & A^{kkkckkk} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
\vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Wszystkie zbiory zawarte w obu tablicach są w ogólnym wypadku między sobą różne i nie zachodzą między niemi żadne inne związki, prócz podanych w tych tablicach.

4. Oznaczmy przez $A^{a_n} = A^{k^{n-1}} A^{k^n c}$ n-tą adherencję zbioru A. A^{k^n} oznacza tu n-tą koherencję zbioru A. Pochodną zbioru A oznaczmy przez A^d.

Można teraz udowodnić dwa następujące znane twierdzenia:

I. Każdy zbiór A można rozłożyć na następujące części nie posiadające elementów wspólnych (dla dowolnego naturalnego n):

$$A = A^{a_1} + A^{a_2} + \cdots + A^{a_n} + A^{k^n}.$$

II. Twierdzenie W. H. Younga i L. E. J. Brouwera:

$$A^{a_n} \subset A^{a_m d} \quad \text{dla } m < n.$$

5.[2] Koherencja określa się przez pochodną przy pomocy następującego wzoru $A^k = AA^d$. Nie można jednak określić w podobny sposób pochodnej przez koherencję, t. zn , że gdy na dowolnym zbiorze A wykonywać będziemy operacje A^k i A^c i gdy będziemy tworzyć logiczne sumy i iloczyny otrzymanych w ten sposób zbiorów, to w ogólnym wypadku nie otrzymamy takiego zbioru, który byłby identyczny ze zbiorem A^d.

Można jednak określić pochodną przez koherencję w następujący sposób:

---

[2] Treść tego ustępu nie była ogłoszona we wspomnianej nocie Trans. of Amer. Math. Soc.; znajduje się ona w pracy p. t.: Pochodna i koherencja zbiorów abstrakcyjnych, Rozprawy Tow. Naukowego im. Szewczenki we Lwowie, tom XXVII (w języku ukraińskim).

Punkt a jest elementem pochodnej A^d, gdy jest on zawarty w $\{A + (a)\}^k$.

Zbiór A jest zamknięty, gdy z relacji $a \in \{A + (a)\}^k$ wynika, że: $a \in A$.

Zbiór A jest w sobie gęsty, gdy z relacji $a \in A$ wynika, że: $a \in \{A + (a)\}^k$.

Domknięcie A^r zbioru A można określić przez koherencję w następujący sposób:

$$a \in A^r \quad \text{gdy: } a \in A + \{A + (a)\}^k.$$

A. F. Andersen (Kopenhaga)

Sur la caractérisation des régularités des suites au moyen de leurs différences

Les recherches dont j'aurai l'honneur de vous parler aujourd'hui s'attachent aux *suites convergentes*. Nous allons étudier et comparer les différentes espèces de régularité dont on a fait un usage fréquent dans la théorie des suites (et, bien entendu, dans la théorie des séries) sans qu'on se soit rendu compte ni des ressemblances qu'il y a entre elles, ni des différences qu'elles présentent. Je pense que, parmi ces différentes sortes de régularité, l'idée de la monotonie se présente tout d'abord à l'esprit en conséquence de la simplicité de sa caractérisation et de la grande fréquence avec laquelle cette notion a été employée. Mais je ne tarde pas à vous en annoncer d'autres qui ont joué aussi un rôle assez important. La régularité que doit posséder une suite convergente (ε_ν) pour que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^r \left|\Delta^{r+1} \varepsilon_\nu\right|$$

soit convergente est à la base de différents théorèmes de M. M. Bromwich, Hardy et Bohr, et j'ai eu l'occasion de l'utiliser d'une manière assez étendue. Aussi les régularités déterminées par des conditions comme

$$\Delta^r \varepsilon_\nu = o(\nu^{-r}) \quad \text{et} \quad \Delta^r \varepsilon_\nu = O(\nu^{-r})$$

seront considérées. Ces espèces de régularité sont toutes caratérisées au moyen des différences appartenant à la suite (ε_ν) en question. Il en est de même des autres sortes de régularité que je vais mentionner sous peu. Donc, il conviendra, dès maintenant, de dire quelques mots sur la détermination des différences d'une suite donnée (ε_ν).

A toute suite

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$$

appartient une suite de différences de premier ordre

$$\Delta^1\varepsilon_0, \Delta^1\varepsilon_1, \Delta^1\varepsilon_2, \ldots, \Delta^1\varepsilon_\nu, \ldots$$

où

$$\Delta^1\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1},$$

et une suite de différences de second ordre

$$\Delta^2\varepsilon_\nu = \Delta^1\varepsilon_\nu - \Delta^1\varepsilon_{\nu+1} = \varepsilon_\nu - 2\varepsilon_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+2} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

en continuant de cette façon on obtiendra une suite de différences *d'ordre r pour toute valeur entière et positive de r*, déterminée par

$$\Delta^r \varepsilon_\nu = \Delta^{r-1}\varepsilon_\nu - \Delta^{r-1}\varepsilon_{\nu+1} = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p \binom{r}{p} \varepsilon_{\nu+p}.$$

J'écrirai

$$\Delta^r \varepsilon_\nu = \sum_{p=0}^{r} A_p^{-r-1} \varepsilon_{\nu+p}$$

en introduisant la notation

$$\binom{n+\rho}{\rho} = \frac{(n+\rho)(n+\rho-1)\dots(\rho+1)}{1.2.3\dots n} = A_n^\rho$$

afin qu'on soit avisé par la notation même de l'ordre de grandeur (n^ρ pour $n \to \infty$) des coefficients binomiaux en question.

Cependant, nous ne pouvons pas nous contenter des différences ordinaires d'ordres entiers et positifs; cet outil n'est pas assez souple. Afin de pouvoir bien distinguer les différentes régularités les unes des autres, il nous faut une notion de différence beaucoup plus adaptée à la tâche: celle des différences d'ordre quelconque. J'adopterai ici la même définition que j'ai employée, il y a quelques années, dans ma Thèse[1)], et qu'ont utilisée depuis M. M. Knopp, Kaluza et Ferrar dans leurs récents

---

1) Studier oyer Cesàro's Summabilitetsmetode, Copenhague 1921.

travaux sur les suites monotones d'ordre quelconque. Je pose pour tout nombre réel r

$$\Delta^r \varepsilon_\nu = \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{-r-1} \varepsilon_{\nu+p}$$

et $\Delta^r \varepsilon_\nu$ se trouve ainsi définie pour chaque valeur de r qui rend cette série convergente. Comme ε_p tend vers zéro lorsque p tend vers l'infini, cette série sera sûrement convergente pour toute valeur *positive* de r, l'ordre de grandeur des coefficients étant celui de p^{-r-1}. Si. dans cette expression, nous faisons r égal à un entier positif, tous les coefficients A_p^{-r-1} s'annulent à partir de l'indice $p = r + 1$; par conséquent, la série se réduit à l'expression ordinaire pour $\Delta^r \varepsilon_\nu$.

Cette généralisation est donc assez naturelle quant à la forme. Mais, elle ne servirait à rien si les différences qu'elle crée, ne satisfaisaient pas à l'équation caractéristique de cette opération, savoir

$$\Delta^r (\Delta^\rho \varepsilon_\nu) = \Delta^{r+\rho} \varepsilon_\nu.$$

On a beau attacher à ces quantités le nom de différence, elles ne le méritent point si elles ne jouissent pas de la propriété exprimée par cette équation. De même qu'il n'y aurait aucune raison pour appeler fonction exponentielle une fonction ne satisfaisant pas à l'équation fonctionelle

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2).$$

Eh bien, cette condition est remplie, au moins jusqu'à un certain point. J'ai démontré que l'égalité

$$\Delta^r(\Delta^\rho \varepsilon_\nu) = \Delta^{r+\rho} \varepsilon_\nu$$

est assurée pour toute suite convergente (ε_ν), pourvu que

$$r \geq -1, \quad \rho \geq 0 \quad \text{et } r + \rho \geq 0.$$

Il y a donc une limitation, mais cette limitation est due particulièrement à l'exigence de la convergence des séries en question. Il est très probable que cette région de validité s'étendrait si l'on admettait la définition de $\Delta^r \varepsilon_\nu$ à l'aide d'un procédé de sommation plus puissant (par exemple la méthode de Cesàro qui, en cette matière, est certainement la plus appropriée). Et il nous reste encore d'autres moyens; dans le cas où la série $\sum A_p^{-r-1} \varepsilon_{\nu+p}$ ne converge pas, on pourrait obtenir une détermination des quantités $\Delta^r \varepsilon_\nu$ en résolvant un système d'équations de différences, mais je n'insisterai pas sur ce point. En effet, ces considérations ne sont pour rien dans les recherches qui nous occuperont ici, et je ne tarde pas à les abandonner. La définition que j'ai énoncée au début, déterminant les différences $\Delta^r \varepsilon_\nu$ à l'aide des séries convergentes, suffit complètement à nos besoins actuels.

Revenons donc à notre problème. Je rappelle que nous ne considérerons que des suites convergentes; et nous pourrons même supposer que leur limite est toujours égale à zéro. Cela ne restreint nullement nos résultats, les différences utilisées étant toutes *d'ordre positif* et, pour cette raison, invariables par l'augmentation des termes ev d'une même constante.

Nous allons considérer les régularités imposées par les conditions respectives que voici:

Premier groupe:

1) $\Delta^r \varepsilon_\nu = o(\nu^{-r})$
2) $\Delta^r \varepsilon_\nu = O(\nu^{-r})$
3) $\Delta^r \varepsilon_\nu > -c(\nu+1)^{-r}$ pour tout ν, $c > 0$.

Second groupe:

La série $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^r \Delta^{r+1} \varepsilon_\nu$ est

4) absolument convergente
5) convergente
6) bornée
7) bornée supérieurement.

Troisième groupe:

8) La monotonie d'ordre r: $\Delta^r \varepsilon_\nu > 0$ pour tout ν.

Dans toutes ces conditions r représente un nombre *positif* quelconque.

Il est évident que les régularités du premier groupe peuvent être comparées entre elles, quel que soit le caractère de ces régularités. La première régularité est plus puissante que la deuxième, et celle-ci est encore plus puissante que la troisième. Cette application du mot „puissant" se comprend presque sans explication. Je veux dire qu'il existe des suites qui possèdent la deuxième régularité sans en posséder la première, tandis que l'inverse n'aura pas lieu; en d'autres termes, l'ensemble des suites (ε_ν) satisfaisant à la première condition est renfermé dans l'ensemble dont les suites jouissent de la deuxième propriété. Dans ce sens du mot nous pouvons de même comparer les régularités du second groupe et les ranger selon leur puissance; on voit immédiatement que la régularité s'affaiblit dans la succession 4), 5), 6), 7). – Mais les trois groupes de régularité, peuvent-ils être comparés entre eux? Voici le problème. La réponse dépend d'un examen minutieux du caractère des différentes sortes de régularités.

Dans la premier cas, on trouve que la régularité est telle qu'on a

$$\Delta^\rho \varepsilon_\nu = o(\nu^{-\rho}) \quad \text{pour } 0 < \rho \leq r,$$

c'est-à-dire que l'opération Δ^ρ, appliquée à la suite (ε_ν), aura pour effet une diminution de l'ordre de grandeur, et précisément celle effectuée par le facteur $\nu^{-\rho}$. Cette régularité est d'autant plus puissante que la valeur de r est plus grande. Tant qu'on veut caractériser la régularité d'une suite au moyen de l'allure de ses différences pour ν tendant vers l'infini, on ne peut pas imaginer régularité meilleure que celle-ci pour r infini. Des exemples en sont fournis par des suites comme

$$\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \varepsilon_\nu = \frac{1}{\log \nu}, \quad \varepsilon_\nu = A_\nu^{-\delta} \quad (\delta > 0),$$

bref: par tout ce qu'il y a de plus régulier en matière de suites convergentes. J'ai besoin d'un mot susceptible de signifier cette régularité importante. Est-ce trop de faire usage du mot „parfait"? Je me permettrai de le faire. Donc, nous allons appeler *parfaitement régulière d'ordre r toute suite convergente* (ε_ν) *satisfait aux conditions*

$$\Delta^\rho \varepsilon_\nu = o(\nu^{-\rho}) \quad \textit{pour } 0 < \rho \leq r.$$

Dans cette caractérisation, il se cache une question d'uniformité: peut-on appliquer le même o dans l'intervalle entier $0 < \rho \leq r$? *La réponse est affirmative*: une suite ne peut pas être parfaitement régulière d'ordre *r* sans l'être d'une façon uniforme.

Nous allons maintenant nous tourner vers les deux autres conditions du premier groupe. Elles déterminent, elles aussi, des régularités parfaites, mais pas du même ordre. Toute suite satisfaisant à la condition 2), $\Delta^r \varepsilon_\nu = O(\nu^{-r})$, *sera parfaitement régulière jusqu'à l'ordre r*, c'est-à-dire qu'on aura

$$\Delta^\rho \varepsilon_\nu = o(\nu^{-\rho})$$

pour toute valeur de ç entre zéro et *r*. Cette régularité sera uniforme dans tout intervalle $0 < \rho \leq \sigma$, où $\sigma < r$, la suite étant parfaitement régulière d'ordre *r* pour toute valeur de σ plus petite que *r*. C'est évidemment tout à quoi on pouvait s'attendre.

Enfin toute suite (ε_ν) assujettie à la condition 3) *sera parfaitement régulière d'ordre r* – 1, pourvu que r soit plus grand que l'unité. Cette régularité parfaite constitue la partie essentielle de la régularité 3), mais il y en a d'avantage. Il est évident que la régularité en question est plus puissante que la régularité parfaite d'ordre $r-1$. Toutefois, le caractère de ce surplus de régularité n'est pas assez simple pour qu'on puisse le décrire d'une façon nette. Il faut qu'on se contente de certaines limitations des différences $\Delta^\rho \varepsilon_\nu$, dont l'ordre appartient à l'intervalle de $r-1$ à r (r compris). J'ai obtenu les limitations que voici:

$$\Delta^\rho \varepsilon_\nu = o(\nu^{-r+1})$$
$$\Delta^\rho \varepsilon_\nu > -C(\nu+1)^{-\rho}$$

où la constante C ne dépend pas de ρ. La première relation fournit une limitation des deux côtés, mais pour ce qui est du côté inférieur, elle n'est pas aussi bonne, que celle de la dernière relation. Si r ne dépasse pas l'unité il n'y a aucune régularité parfaite, et ces deux relations seront remplacées par

$$\Delta^\rho \varepsilon_\nu = o(1)$$
$$\Delta^\rho \varepsilon_\nu > -C(\nu+1)^{-\rho}, \quad 0 < \rho \leq r$$

dont la première relatiou est tout à fait triviale puisque valable pour toute suite convergente.

Nous sommes maintenant arrivés au second groupe. Heureusement nous pourrons en finir très rapidement. Je ne dis pas trop, si j'affirme qu'il y a une relation étroite entre ces deux groupes. En effet, *les régularités appartenant à l'un et à Vautre sont complètement équivalentes deux à deux*, les combinaisons étant 1)–5), 2)–6) et 3)–7). Cela veut dire que les conditions 5),

6) et 7) constituent respectivement une caractérisation complète des trois régularités du premier groupe. Par exemple: *La condition nécessaire et suffisante pour que la suite convergente* (ε_ν) *soit parfaitement régulière d'ordre r, est que la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^r \Delta^{r+1} \varepsilon_\nu$$

soit convergente.

Une première conséquence est que nous sommes maintenant à même de comparer, en matière de puissance, la régularité 4) déterminée par la convergence *absolue* de la série:

$$\sum A_\nu^r \Delta^{r+1} \varepsilon_\nu$$

avec les régularités du premier groupe. Elle est incontestablement la plus puissante de toutes les régularités considérées jusqu'à maintenant. Elle détermine une régularité parfaite d'ordre r en raison de la convergence simple, et quelque chose de plus qui tient à ce que la convergence est absolue. De ce surplus de régularité je ne sais pas dire grand chose; cependant, il y a une petite circonstance que je ne dois pas passer sous silence, puisqu'elle nous sera utile dans la suite: si r ne dépasse pas l'unité, nous pouvons affirmer que la convergence *absolue* de la série $\sum A_\nu^r \Delta^{r+1} \varepsilon_\nu$, n'assurera pas seulement la régularité parfaite d'ordre r de la suite (ε_ν), mais qu'elle entraînera encore la régularité parfaite de la suite se composant des modules des termes ε_ν. Dans ce cas-là l'on pourrait donc parler *d'une régularité absolue* d'ordre r.

Considérons enfin la *monotonie d'ordre r* ($\Delta^r \varepsilon_\nu > 0$). Dans un mémoire inséré dans la „Mathematische Zeitschrift", 1925, M. Knopp a étudié cette régularité sous certains aspects. Il a comparé entre elles les monotonies d'ordres différents, en démontrant que la puissance va en croissant avec l'ordre r; une suite monotone d'ordre r est aussi monotone de tout ordre plus petit que r. C'est ainsi que M. Knopp peut parler d'un indice de monotonie; la borne supérieure des nombres r pour lesquels les différences $\Delta^r \varepsilon_\nu$ restent positives. La monotonie ordinaire est d'ordre 1. Les monotonies d'ordres inférieures à 1 sont plus faibles que la monotonie ordinaire.

J'ai placé la monotonie dans un groupe particulier en raison du grand intérêt qui s'y attache, bien qu'elle ne constitue pas une nouvelle espèce de régularité. En effet, la monotonie d'ordre r est très voisine à la régularité 3) déterminée par

$$\Delta^r \varepsilon_\nu > -c(\nu+1)^{-r} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots);$$

elle est évidemment un peu plus puissante que celle-ci, vu que la différence $\Delta^r \varepsilon_\nu$ est forcement supérieure à $-c(\nu+1)^{-r}$ lorsqu'elle est positive, tandis qu'il ne faut pas que l'inverse ait lieu. Donc, toutes les propriétés de cette régularité appartiennent aussi à la monotonie d'ordre r. A cet égard, il faut surtout remarquer *que toute suite monotone d'ordre r sera parfaitement régulière d'ordre* $r-1$, *pourvu que* $r > 1$. Ce résultat est aussi dû à M. Knopp. J'ajouterai que c'est-là le meilleur résultat possible en ce sens. Il existe une suite monotone d'ordre r qui n'est pas parfaitement régulière d'ordre $r-1+\delta$, si petit que le nombre positif δ soit choisi.

Pourtant, outre la régularité parfaite d'ordre $r-1$ la monotonie d'ordre $r>1$ renferme un petit surplus de régularité, dont je ne sais pas grand chose, il est vrai, mais toujours assez pour assigner à la monotonie d'ordre r la place qui lui convient parmi les régularités voisines. En rappellant la nouvelle caractérisation de la régularité parfaite nous obtiendrons la succession suivante:

A. *La monotonie d'ordre r*
caractérisée par la convergence de la série à termes *positifs* $\sum A_\nu^{r-1}\Delta^r \varepsilon_\nu$

B. *La régularité absolue d'ordre $r-1$*
caractérisée par la convergence de la série $\sum A_\nu^{r-1}|\Delta^r \varepsilon_\nu|$,

C. *La régularité parfaite d'ordre $r-1$*
caractérisée par la convergence de la série $\sum A_\nu^{r-1}\Delta^r \varepsilon_\nu$.

Il est évident que la puissance ne peut pas s'augmenter dans cette succession; qu'en réalité elle va en décroissant, c'est ce que montrent facilement des exemples choisis à propos.

Après la monotonie d'ordre supérieur à 1 nous allons considérer la monotonie, dont l'ordre est plus petit que l'unité; elle est surtout susceptible d'attirer l'attention, puisqu'elle est plus faible que la monotonie ordinaire (d'ordre 1). Elle a été étudiée par M. M. Kaluza et Ferrar dans de récents travaux également parus, il y a quelques mois seulement, dans la „Mathematische Zeitschrift". Toutefois leur point de vue est tout différent du nôtre. Dans le cas de cette faible monotonie il ne reste plus de régularité parfaite, autant que je sache. Il y a donc lieu de se demander si, pour le moins, la convergence de la série

$$\sum A_\nu^{r-1} \Delta^r \varepsilon_\nu$$

ne subsisterait pas. Certes, elle subsistera. Mais c'est-là un fait trivial, puisque la convergence de cette série aura lieu pour *toute suite convergente* ainsi que le fait voir le théorème fondamental, cité au début, sur la superposition des différences. En effet, la série représente la différence superposée

$$\Delta^{-r}(\Delta^r \varepsilon_0) = \varepsilon_0.$$

Si, toutefois, on veut persister dans l'idée que la convergence de cette série est en quelque sorte liée à la monotonie d'ordre r, il faut, pour un moment, enlever la condition que la suite soit convergente. Peut-être la convergence est-elle une régularité assez forte par rapport à cette faible monotonie pour vous empêcher de percevoir l'effet de la monotonie. Remplaçons donc la convergence de la suite par la relation $\varepsilon_\nu = O(1)$ ou, plus généralement encore, par la relation $\varepsilon_\nu > -C$. Ces conditions n'entraîneront point la convergence de la série $\sum A_\nu^{r-1} \Delta^r \varepsilon_\nu$ pour $0 < r \leq 1$. Pourtant, il se trouve que la convergence de cette série sera bien assurée, si l'on impose à la suite (ε_ν) la condition ultérieure d'être monotone d'ordre $r(\leq 1)$. Donc, ce n'est pas trop de dire que la convergence de cette série est en quelque sorte une propriété de la monotonie.

Mon dessein est maintenant accompli. J'ai essayé de vous esquisser la partie la plus marquée de quelques recherches faites sur la comparaison des régularités des suites convergentes, et je vais terminer. Cependant, je voudrais bien – si vous le permettez – vous indiquer quelques petites applications que j'estime susceptibles de vous donner une idée de l'utilité de recherches de cette sorte. Alors il nous faudra porter notre pensée vers des séries régulières. Il ne s'agit évidemment que d'une transformation assez futile; parler d'une série c'est parler d'une suite. Pourtant, cette fois, nous n'allons pas mettre en jeu les sommes partielles Sv. Il conviendra plus d'employer la suite se composant des restes de la série. Etant donnée une série convergente $\sum U_\nu$, nous allons donc considérer la suite convergente

$$\varepsilon_\nu = u_\nu + u_{\nu+1} + \ldots,$$

dont les premières différences coïncident avec les termes de la série. En employant cette suite (ε_ν) au lieu des sommes partielles S_ν on obtiendra d'ailleurs la complète coïncidence des différences $\Delta^r \varepsilon_\nu$ et des différences $\Delta^{r-1} u_\nu$ pour toute valeur *positive* de r:

$$\Delta^r \varepsilon_\nu = \Delta^{r-1} u_\nu.$$

En convenant de dire que la régularité d'une série est celle de la suite des restes (ε_ν), la caractérisation de la régularité de la série $\sum u_\nu$ se réalise d'abord au moyen des différences $\Delta^r \varepsilon_\nu$, mais en tenant compte de l'égalité que je viens de faire remarquer, elle peut aussi bien s'exprimer au moyen des différences

$\Delta^{r-1}u_\nu$. Nous énumérerons quelques exemples qui, au foud, ne sont qu'une transcription des exemples A, B et C que je viens de citer:

A. *Les sériés* $\sum u_\nu$, *monotone d'ordre* $r+1$, r étant un nombre *positif* sont les mêmes que celles dont *les termes forment une suite monotone d'ordre* r. Elles sont caractérisées par la convergence de la série à termes *positifs*:

$$\sum A_\nu^r \Delta^{r+1}\varepsilon_\nu = \sum A_\nu^r \Delta^r u_\nu.$$

B. *Les séries absolument régulières d'ordre* r se caractérisent par la convergence de la série

$$\sum A_\nu^r |\Delta^r u_\nu|.$$

C. *Les séries parfaitement régulières d'ordre* r se caractérisent par la convergence de la série

$$\sum A_\nu^r \Delta^r u_\nu$$

ou bien par la relation $\Delta^{r-1}u_\nu = o(\nu^{-r})$.

Ces régularités sont évidemment rangées selon leur puissance, celle-ci s'affaiblissant légèrement dans cette succession.

C'est un fait élémentaire qu'une série $\sum u_\nu$, dont les termes forment une suite monotone d'ordre 1, est tellement régulière qu'on a $u_\nu = o(\nu^{-1})$. Mais on n'a jamais essayé, autant que je sache, de substituer, dans cette proposition, à la monotonie une régularité plus faible. C'est ce que nous pouvons faire maintenant. Nous pouvons même déterminer la régularité qu'il faut imposer à la série pour que la relation $u_\nu = o(\nu^{-1})$ ait lieu. La série doit être parfaitement régulière d'ordre 1, ainsi qu'il ressort de C. *La condition nécessaire et suffisante en est que la série*

$$\sum(\nu+1)\Delta u_\nu$$

soit convergente.

M. Knopp a démontré, dans le mémoire cité, que toute série convergente, dont les termes forment une suite monotone d'ordre r, r étant inférieur à 1, est assez régulière pour qu'on ait

$$u_\nu = o(\nu^{-r}).$$

Or, cette propriété n'est, nonplus, bien propre aux séries monotones. En effet, les séries qui sont absolument régulières d'ordre r en jouissent également, et cette régularité est plus faible que l'autre. La cause en est que toute série absolument régulière d'ordre r sera telle que la série $\sum |u_\nu|$ sera, à son tour, convergente et parfaitement régulière d'ordre r. Car cela veut dire que

$$\Delta^{r-1}|u_\nu| = o(\nu^{-r})$$

et comme les termes de la série

$$\Delta^{r-1}|u_\nu| = \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{-r}|u_{\nu+p}|$$

sont tous positifs, il faut que le premier soit plus petit que la somme de la série, et c'est-à-dire que

$$u_\nu = o(\nu^{-r}).$$

M. Jacob (Wiedeń)

O uogólnionych całkach Fouriera i o jednoznaczności uogólnionych całek trygonometrycznych

Punktem wyjścia następujących rozważań jest wspólna definicja szeregów i całek Fouriera, którą się uzyskuje przez zastosowanie pojęcia całki Stieltjesa. Z tego wynika możliwość jednolitego traktowania kilku ważnych zagadnień z teorji szeregów i całek trygonometrycznych.

Niechaj będzie $f(\xi)$ funkcją mierzalną w $[-\infty, \infty]$, całkowalną w każdym skończonym zakresie, która ponadto w nieskończoności spełnia następujące warunki: 1°) $\left|\frac{f(\xi)}{\xi}\right|$ posiada całkę w nieskończoności, 2°) $f(\xi)$ jest w nieskończoności funkcją perjodyczną.

Tworząc według p. H. Hahna (Acta Mathem. 49):

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{\sin\mu\xi}{\xi}d\xi$$

$$\Psi(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(\xi)\frac{1-\cos\mu\xi}{\xi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1} f(\xi)\frac{\cos\mu\xi}{\xi}d\xi \quad (1)$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty} f(\xi)\frac{\cos\mu\xi}{\xi}d\xi$$

można podporządkować funkcji $f(\xi)$ następujące wyrażenie:

$$f(x) \sim \int_0^{\infty}\left[\cos\mu x d\Phi(\mu) + \sin\mu x d\Psi(\mu)\right]. \qquad (2)$$

To podporządkowanie redukuje się: a) do szeregu Fouriera, jeśli $f(\xi)$ jest funkcją czysto perjodyczną i b) do całki Fouriera, jeśli $f(\xi)$ czyni zadość w nieskończoności warunkom ściślej określonym.

Zajmujemy się dwoma zagadnieniami tej teorji:

I) Relacja (1) umożliwia nam przedstawić formułę Parsevala w takiej formie, że klasa funkcji, dla której twierdzenie to jest znanem, zostaje znacznie rozszerzoną.

II) Jesteśmy również w stanie udowodnić twierdzenie o jednoznaczności dla uogólnionych całek trygonometrycznych, przyczem dowód tego twierdzenia polega na uogólnieniu kilku twierdzeń p. J. C. Burkilla, dotyczących również uogólnionych całek Fouriera (Proc. Lond. Math. Soc. (2) 25.).

Stefan Kaczmarz (Lwów)

Warunki zbieżności szeregów ortogonalnych

W komunikacie niniejszym mam zamiar podać pewien warunek zbieżności szeregu ortogonalnego $\sum a_n \varphi_n(x)$, gdzie $\sum a_n^2 < \infty$, warunek odmiennego typu, niż znane dotychczas warunki. Dotychczasowe bowiem założenia o szeregu ortogonalnym odnosiły się do własności spółczynników a_n, nasuwa się zatem problem przy jakich założeniach odnoszących się do samego układu ortogonalnego szereg będzie zbieżny prawie wszędzie. Założenia te tyczą się funkcji Lebesgue'a dla danego układu, to znaczy

$$\rho_n(x) = \int_0^1 \left| \sum_1^n \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt.$$

O funkcji powyższej udowodnił Rademacher, iż prawie wszędzie

$$\rho_n^2(x) = O(n \log^{3+\varepsilon} n), \quad \varepsilon > 0.$$

Otóż łatwo jest wykazać następujące

Twierdzenie. Dla funkcji $\rho_n(x)$ mamy prawie wszędzie

$$\rho_n^2(x) = o(n \log^{1+\varepsilon} n).$$

Na podstawie bowiem nierówności Schwarza mamy

$$\rho_n^2 \leq \sum_1^n \varphi_k^2(x).$$

Z drugiej strony szereg

$$\sum \frac{1}{n \log^{1+\varepsilon} n} \varphi_n^2(x)$$

jest prawie wszędzie zbieżny, zatem wedle Kroneckera

$$\sum_1^n \varphi_k^2(x) = o(n \log^{1+\varepsilon} n).$$

Jeżeli teraz założymy, że funkcja Lebesgue'a jest prawie wszędzie ograniczona bez względu na wówczas mamy

Twierdzenie. *Jeżeli prawie wszędzie*

$$\rho_n(x) < 1$$

wtedy szereg ortogonalny

$$\sum a_n \varphi_n(x)$$

jest prawie wszędzie zbieżny, jeżeli tylko $\sum a_n^2 < \infty$.

Stefan Kempisty (Wilno)

O całkach funkcji przedziału[*]

(Sur les intégrales d'une fonction d'intervalle)

Considérons les intervalles à k dimensions, c'est-à-dire les ensembles de points dont les projections sont des intervalles linéaires.

Soit $g(I)$ *une fonction d'intervalle* (additive ou non additive) définie pour tous les intervalles contenus dans un intervalle R.

Lorsque $\mathcal{S}$ est un *système simple*, composé d'un nombre fini d'intervalles non empiétants $I_1, I_2, \ldots, I_n$, nous poserons

$$g(\mathcal{S}) = g(I_1) + g(I_2) + \cdots + g(I_n).$$

En particulier la *longueur* du système $\mathcal{S}$

$$|\Upsilon| = |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_n|,$$

* Komunikat ten został wygłoszony na Zjeździe zamiast komunikatu C 25 p. t. Całka aproksymatywna.

$|I_i|$ étant la longueur de l'intervalle I_i.

Une fonction d'intervalle $g(I)$ est *absolument continue* quand $g(\mathcal{S})$ tend vers zéro avec la longueur de $\mathcal{S}$.

Quand $\mathcal{S}| = |R|$, le système $\mathcal{S}$ est un système de division de l'intervalle R.

D'après M. Burkill, *l'intégrale supérieure* (*inférieure*) de $g(I)$ dans R est la plus grande limite de $g(\mathcal{S})$, la *norme* du système de division $\mathcal{S}$ tendant vers zéro[1].

Si les deux intégrales extrêmes

$$\underline{\int}_R g(I) \quad \text{et} \quad \overline{\int}_R g(I)$$

sont égales, la fonction d'intervalle $g(I)$ est *integrable* et la valeur commune de ces intégrales est l'intégrale

$$\int_R g(I).$$

Lorsqu'une fonction d'intervalle $g(I)$ est absolument continue dans R, les intégrales extrêmes sont finies dans R et dans tout intervalle contenu dans R[2]. De plus, ces intégrales sont des fonctions d'intervalle absolument continues dans R.[3]

---

[1] J. C. Burkill, Functions of intervais, Proc. Lond. Math. Soe. v. 22 (1923) p. 295. La *norme*, du système $\mathcal{S}$ est la plus grande de dimensions des intervalles I_i.

[2] loc. cit. p. 287 Th. 3.6.

[3] S. Saks. Sur les fonctions d'intervalles, Fundamenta Math. X (1927) p. 213, Th. 2.

En particulier, quand $g(I)$ est integrable et absolument continu, son intégrale est finie et absolument continue[4)].

Nous allons voir que la continuité absolue de $g(I)$ est non seulement suffisante mais nécessaire pour que son intégrale soit finie et absolument continue.

Lemme. *Si $g(I)$ est intégrable, nous pouvons, quel que soit e positif, déterminer δ de manière qu'on ait, pour tout système simple $\mathcal{S}$ de norme inférieure à δ, l'inégalité*

$$\left| g(\mathcal{S}) - \int_{\mathcal{S}} g(I) \right| < \varepsilon.$$

Supposons, en effet, qu'il existe un ε positif, tel que, δ étant quelconque, on a, pour un système $\mathcal{S}_1$ de norme inférieure à δ, la relation

$$g(\mathcal{S}_1) > \int_{\mathcal{S}_1} g(I) + \varepsilon. \tag{1}$$

Choisissons δ de manière qu'on ait, pour un système $\mathcal{S}$ qui divise R,

$$g(\mathcal{S}) < \int_R g(I) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

dès que la norme de $\mathcal{S}$ est inférieure à δ.

Soit $\mathcal{S}_2$ un système de division du complémentaire des intervalles du système $\mathcal{S}_1$. Nous pouvons choisir $\mathcal{S}_2$ de norme $< \delta$ et tel que

$$g(\mathcal{S}_2) < \int_{\mathcal{S}_2} g(I) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

4) Burkill, loc. cit., p. 289, Th. 4.

Comme l'intégrale est une fonction additive d'intervalle, nous avons, d'après (1) et (3)

$$g(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) > \int_R g(I) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

En posant $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, nous arrivons à la contradiction entre (2) et (4).

Théorème. *Lorsque Vintégrale d'une fonction d'intervalle $g(I)$ est absolument continue dans R, il en est même de la fonction $g(I)$.*

D'après l'hypothèse, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe positif tel que

$$\left|\int_{\mathcal{S}} g(I)\right| < \varepsilon, \quad \text{pour } |\mathcal{S}| < \delta_1.$$

Soit δ_2 un nombre bornant les normes des systèmes $\mathcal{S}$ pour lesquels on a d'après le lemme démontré

$$\left|g(\mathcal{S}) - \int_{\mathcal{S}} g(I)\right| < \varepsilon.$$

Lorsque $\delta < \delta_1, \delta_2$, nous avons alors $|g(\mathcal{S})| < 2\varepsilon$, quel que soit le système simple $\mathcal{S}$ de longueur $< \delta$, c'est-à-dire $g(I)$ est absolument continue.

Application. Soit $f(x)$ une fonction mesurable, presque partout finie dans l'intervalle (a, b). Convenons de dire que $m(f, I, \lambda)$ est *la borne inférieure à densité λ près* d'une fonction

$f(x)$ dans I, lorsqu'elle est égale au plus grand de nombres y tels que, E étant l'ensemble de points x où $f(x) < y$, on a

$$|EI| \leq \lambda |I| \quad (0 < \lambda < 1)^{5)}.$$

Posons

$$g(I) = m(f, I, \lambda)|I|.$$

D'aprés les théorèmes généraux, cette fonction est absolument continue dans (a, b) en même temps que son intégrale $\int_R g(I)$, pour $R = (a, x)$ et $a \leq x \leq b$. Celle-ci est alors une intégrale de Lebesgue. Nous verrons qu'elle est égale exactement à l'intégrale

$$\int_a^x f(x)\, dx.$$

En effet, il résulte d'un théorème de M. Burkill[6] que, $g(I)$ étant absolument continue,

$$\underline{\int}_R g(I) = \int_a^x \underline{Dg}\, dx \leq \int_a^x \overline{Dg}\, dx = \overline{\int}_R g(I),$$

où $\underline{Dg}$ et $\overline{Dg}$ désignent resp. la dérivée inférieure et supérieure de $g(I)$ au point x, c'est-à-dire la limite inférieure resp. supérieure du quotient $\frac{g(I)}{|I|}$, I tendant régulièrement vers le point x.

---

[5] St. Kempisty, Sur les limites approximatives, Comptes Rendus, t. 180, p. 642. $|EI|$ est la mesure de la partie de l'ensemble E contenue dans 1.

[6] loc. cit. 309, Th. 7.6.

Comme, d'après M. Denjoy[7)], toute fonction mesurable est presque partout approximativement continue, le quotient $\frac{g(I)}{|I|}$, qui est égal à $m(f, I, \lambda)$, tend presque partout vers $f(x)$. Alors on a presque partout

$$\underline{Dg} = \overline{Dg} = f(x)$$

et par suite

$$\underline{\int}_R g(I) = \overline{\int}_R g(I) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Inversement lorsque $f(x)$ est sommable, notre fonction d'intervalle $g(I)$ est absolument continue. Supposons d'abord que $f(x)$ est non négative, alors

$$(1-\lambda)g(I) < \int_I f(x)\,dx.$$

Il en résulte que $g(I)$ est absolument continue. La démonstration est analogue pour $f \leq 0$.

Quand $f(x)$ est une fonction quelconque, nous pouvons la représenter par une somme de deux fonctions

$$f_1 = \frac{f+|f|}{2} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{f-|f|}{2}.$$

---

7) A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées soimnables, Bull. Soc. Math, de France t. 43 (1915) p. 219.

Or,

$$m(f, I, \lambda) = m(f_1, I, \lambda) + m(f_2, I, \lambda)$$

donc le théorème subsiste.

Ainsi *la continuité absolue de* $m(f, I, \lambda)|I|$ *est une condition nécessaire et suffisante de la sommabilité de* $f(x)$.

Nous avons vu que

$$\int_a^x f\,dx = \int_R m(f, I, \lambda)|I|, \quad \text{quel que soit } \lambda.$$

On peut montrer qu'inversement l'intégrale de $m(f, I, \lambda)|I|$, dont la valeur est indépendante de λ, est l'intégrale de Lebesgue de $f(x)$[8)].

---

8) St. Kempisty, Sur l'intégrale (A) de M. Denjoy, Comptes Rendus 185 (1927) p. 749.

Stefan Kempisty (Wilno)

O pochodnych funkcji przedziału*

(Sur les dérivées d'une fonction d'intervalle)

Soit $g(I)$ une fonction d'intervalle définie pour tout intervalle contenu dans (a, b).

Considérons une *famille régulière* composée de tous les intervalles I qui verifient la condition

$$|I| \geq \alpha |S_x|, \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1,$$

S_x étant le plus petit intervalle de centre x contenant I.[1)]

---

* Komunikat powyzszy został wygłoszony na Zjeździe zamiast komunikatu C. 26. p. t. Całkowanie pochodnej regularnej.

1) $|I|$ désigne la longeur de l'intervalle I.

Appelions *dérivée de paramètre α de la fonction $g(I)$ au point x* la limite unique $f(x)$ du quotient

$$\frac{g(I)}{|I|},$$

pour I appartenant à la famille considérée et tendant vers le point x.

Il résulte d'un théorème de M. Burki1l que cette dérivée est une fonction de première classe de M. Baire[2)]

Nous allons établir quelques autres propriétés de la fonction dérivée $f(x)$ de paramètre $\alpha < \frac{1}{2}$.

Convenons de dire qu'une fonction d'intervalle $h(I)$ est *bornée intérieurement*, lorsque, pour toute division d'un intervalle I en deux intervalles contigus I_1 et I_2, on a

$$\min\{h(I_1), h(I_2)\} \leq h(I) \leq \max\{h(I_1), h(I_2)\}.$$

Théorème. Si le quotient $\frac{g(I)}{|I|}$ est une fonction bornée intérieurement, les ensembles

$$E_1 = E_x\left[f(x) > f(x_0) + \varepsilon\right] \quad \text{et} \quad E_2 = E_X\left[f(x) < f(x_0) - \varepsilon\right]$$

[2)] J. C. Burkill, Functions of Intervais, Proceedings of the London Math. Soc. vol. 20 (2), p. 296–7.

ne contiennent pas, dans un voisinage suffisamment petit V_{x_0}, du point x_0, d'autres intervalles fermés I que ceux de densité moyenne inférieure à α, donc tels que

$$\frac{|I|}{|X_{x_0}|} < \alpha.$$

Supposons au contraire qu'il existe, quel que soit δ positif, un voisinage V_{x_0} et un intervalle fermé I, contenu dans V_{x_0} et dans E_1 tels que

$$|I| \geq \alpha |V_{x_0}|, \quad |V_{x_0}| < \delta.$$

Or, quel que soit l'intervalle i contenant x et contenu dans I, on a, par définition de $f(x)$,

$$\frac{g(i)}{|i|} > f(x) - \frac{\varepsilon}{2} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que $|i| < \delta(\varepsilon, x)$.

D'après un lemme de N. Lusin[3)], il existe donc un nombre fini de ces intervalles i:

$$i_1, i_2, \ldots, i_n,$$

sans points intérieurs communs et tels que:

$$I = i_1 + i_2 + \cdots + i_k,$$

$$\frac{g(i_k)}{|i_k|} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

---

3) N. Lusin, Recueil de la Soc. Math, de Moscou XVIII, 1911.

Comme le quotient $\frac{g(I)}{|I|}$ est une fonction bornée intérieurement, nous voyons que

$$\frac{g(I)}{|I|} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit S_{x_0} le plus petit voisinage de centre x_0 contenant I. Comme ce voisinage est contenu dans V_{x_0}, on a *à fortiori*

$$|I| \geq \alpha |S_{x_0}|, \quad |S_{x_0}| < \delta$$

et les intervalles, tels que I, forment une famille régulière de paramètre α.

Quand le nombre ô décroit vers zéro, l'intervalle I tend vers le point x_0 et le quotient $\frac{g(I)}{|I|}$ a pour limite $f(x_0)$, ce qui est impossible d'après l'inégalité établie.

Ainsi notre théorème est démontré pour l'ensemble E_1. Or le même raisonnement s'applique à l'ensemble E_2.

Corollaire 1. Dans chaque intervalle suffisamment petit et ayant pour extremité le point x_0, existent des points des ensembles E_1 et E_2 et par suite

$$\underline{f}(x_0 + 0) \leq f(x_0) \leq \overline{f}(x_0 + 0),$$
$$\underline{f}(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq \overline{f}(x_0 - 0).$$

Corollaire 2. Tout point d'un des ensembles

$$E_x[f(x) > A] \quad E_x[f(x) < A]$$

est un point d'accumulation symmétrique.

Corollaire 3. Comme, d'après M. Denjoy[4)], toute fonction jouissant de la propriété énoncée dans le Cor. 2 est continue au sens de Darboux, nous voyons que la dérivée de paramètre $\alpha < \frac{1}{2}$ prend dans l'intervalle (a, b) toute valeur intermédiaire à $f(a)$ et $f(b)$.

Applications.

1. Soit $F(x)$ une fonction dérivable dans (a, b).
   Posons, pour l'intervalle $I = (\alpha, \beta)$,

$$g(I) = F(\beta) - F(\alpha).$$

   La variation $g(I)$ étant additive, la variation relative $\frac{g(I)}{|I|}$ est évidemment une fonction bornée intérieurement.
   Or la dérivée F'(x) qui est une dérivée de paramètre $\frac{1}{2}$ de $g(I)$ est en même temps une dérivée de paramètre α de cette fonction d'intervalle, quel que soit $\alpha < 1$.[5)] Elle possède donc les propriétés énoncées dans le théorème et dans les corollaires.
   Nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration du théorème de Darboux sur les dérivées.
2. Soit $M(I, \lambda)$ *la borne supérieure à densité λ près* dans l'intervalle I d'une fonction mesurable et presque partout finie

---

[4)] A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées sommables, Bull. Soc. Math, de France t. 43, 1915, p. 184, ap.[1)].

[5)] J. C. Burkill, loco cit. p. 298.

$f(x)$, c'est-à-dire le plus petit des nombres y tels que la densité moyenne de l'ensemble

$$E = E_x[f(x) > y]$$

est au plus égale à λ[6].

$M(I, \lambda)$ est évidemment une fonction d'intervalle finie et bornée intérieurement.

Posons

$$g(I) = M(I, \lambda)|I|.$$

Si $f(x)$ est approximativement continue, elle est la dérivée de paramètre α de $g(I)$ pour α et λ quelconques entre 0 et 1.

Alors elle appartient à la première classe de M. Baire, prend toute valeur intermédiaire[7], et jouit de la propriété générale énoncée dans le théorème qui vient d'être établi.

---

[6] St. Kempisty, Sur les limites approximatives, Comptes Rendus 180 (1925), p. 642–4.

[7] A. Denjoy, loco cit. p. 184, 179.

Stanisław Mazur (Lwów)

O metodach sumowalności

W pracy niniejszej podaję kilka twierdzeń o funkcjonałach addytywnych w polach ciągów; w szczególności zajmuję się temi funkcjonałami, które są określone przy pomocy metod limesowalności Toeplitz'a.

I.

Twierdzenie 1. *Gdy P_1, P_2 są polami ciągów, przyczem $P_1 \subset P_2$ zaś $f_1(\{a_n\})$ jest funkcjonałem addytywnym (i jednorodnym) w P_1, to istnieje funkcjonał addytywny (i jednorodny) $f_2(\{a_n\})$ w P_2, taki, że $f_2(\{a_n\}) = f_1(\{a_n\})$ skoro $\{a_n\} \in P_1$; przytem gdy pole P_2 jest unormowane*[1] *i funkcjonał $f_1(\{a_n\})$ jest ciągły w P_1, to funkcjonał $f_2(\{a_n\})$ jest ciągły w P_2.*

W szczególności tedy istnieje n. p. funkcjonał addytywny i jednorodny w polu wszystkich ciągów $f(\{a_n\})$ taki, że

[1] Definicje terminów z teorji operacji, których używam, zawiera praca: S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fundamenta Mathematicae, III, 1922.

$f(\{a_n\}) = \lim_{n\to+\infty} a_n$, skoro ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny[2]; w przypadku gdy ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny, liczba $f(\{a_n\})$ może być rozpatrywana jako jego uogólniona granica. Przytem oczywiście funkcjonał $f(\{a_n\})$ może być tak dobrany, by w polu wszystkich ciągów ograniczonych przy zwykłem jego unormowaniu był ciągły.

Można dalej udowodnić, korzystając z pozytywnego rozwiązania szerszego problemu miary w przypadku linjowym[3], następujące

Twierdzenie 2. *Istnieje w polu wszystkich ciągów ograniczonych funkcjonał addytywny i jednorodny $f(\{a_n\})$ spełniający warunki:*

1. $f(\{a_n\}) = f(\{a_{n+1}\})$;
2. $f(\{a_n\}) \geq 0$ *skoro* $a_n \geq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$;
3. $f(\{1\}) = 1$.

Każdy funkcjonał tego rodzaju jest ciągły przy zwyczajnej definicji normy w rozważanem polu i posiada tę własność, że $f(\{a_n\}) = \lim_{n\to+\infty} a_n$, gdy ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny. W ten sposób uzyskujemy znowu pewne uogólnienie pojęcia granicy, mające tę zaletę że w przypadku każdych dwóch ciągów, z których jeden powstaje z drugiego zapomocą skończonej liczby

---

[2] Twierdzenie to znajduje się w pracy: H. Steinhaus, Kilka słów o uogólnieniu pojęcia granicy, Prace matematyczno-fizyczne, XXII, 1911.

[3] S. Banach, Sur le problème de la mesure, Fundamenta Mathematicae, IV, 1923.

zmian, uogólniona granica jest ta sama. Na mocy twierdzenia 1 zakres tego uogólnienia może być rozszerzony do pola wszystkich ciągów.

II.

Do określania funkcjonałów addytywnych i jednorodnych w polach ciągów mogą być użyte metody limesowalności Toeplitz'a[4]. Każda taka metoda M prowadzi mianowicie w znany sposób do określania funkcjonału addytywnego i jednorodnego w pewnem polu ciągów, które nazywa się polem limesowalności metody M. (Nie każde pole ciągów stanowi pole limesowalności pewnej metody Toeplitz'a; tak n. p. nie istnieje metoda Toeplitz'a, której polem limesowalności byłoby pole wszystkich ciągów ograniczonych). Nasuwa się pytanie, jakie warunki muszą spełniać ciągi podwójne $\{a_{n,m}\}$, $\{b_{n,m}\}$ by odpowiadające im metody Toeplitz'a A, B miały tę własność, że każdy ciąg limesowalny metodą A jest limesowalny metodą B i to ewentualnie stale do tej samej liczby. W przypadku gdy metoda A jest identyczną, odpowiedź jest znana. Można jednak podać warunki, o które chodzi, w przypadku ogólniejszym, a mianowicie tym, gdy metoda A jest – jak mówimy – normalną. Tak nazywamy ją, gdy: 1. $a_{n,m} \neq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$; 2. $a_{n,m} = 0$ dla $n < m$ $(n, m = 0, 1, \ldots)$. Wtedy istnieje widocznie dokładnie jedno przekształcenie $\sum_{m=0}^{\infty} \xi_{n,m} u_m$ $(n = 0, 1, \ldots)$ odwrotne

[4] Niektóre twierdzenia tego rozdziału zawiera praca: S. Mazur, Über lineare Limitierungsverfahren, Mathematische Zeitschrift, XXVIII, 1928.

względem przekształcenia $\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} u_m$ $(n = 0, 1, \dots)$; gdy położymy $\xi_n = \sum_{m=0}^{n} \xi_{n,m}$ $(n = 0, 1, \dots)$, to zachodzi

Twierdzenie 3. *Na to, by każdy ciąglimesowalny metodą A był limesowalny metodą B, potrzeba i wystarcza, by spełnione były następujące warunki:*

1. *ciąg* $\{\xi_n\}$ *jest limesowalny metodą B do pewnej liczby a;*
2. *każdy z ciągów* $\{\xi_{n,m}\}$ $(m = 0, 1, \dots)$ *jest limesowalny metodą B do pewnej liczby* a_m*;*
3. *przy każdem danem p całkowitem* ≥ 0 *ciąg* $\{\sum_{n=0}^{r} |\sum_{k=0}^{r} b_{p,k} \xi_{k,n}|\}$ *jest ograniczony;*
4. *ciąg* $\{\sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{k=0}^{\infty} b_{p,k} \xi_{k,n}|\}$ *jest ograniczony.*

Przytem, gdy ciąg $\{u_n\}$ jest limesowalny metodą A do U, to jest on limesowalny metodą B do $aU + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (u_n - U)$; stąd i z twierdzenia poprzedniego wynika odrazu

Twierdzenie 4. *Na to, by każdy ciąg limesowalny metodą A, był limesowalny metodą B i to stale do tej samej liczby, potrzeba i wystarcza, by spełnione były warunki poprzedniego twierdzenia, przyczem* $a = 1$, $a_m = 0$ $(m = 0, 1, \dots)$.

Twierdzenie 3 stanowi uogólnienie twierdzenia Kojimy––Schurra zaś 4 twierdzenia Toeplitz'a.

Możnaby okazać, że gdy spełnione są warunki twierdzenia 3, przyczem metodą A jest jakakolwiek metoda Cesàro C_k lub Eulera E_k $(k > 0)$ a pozatem metoda B jest permanentna, to $a = 1$, $a_m = 0$ $(m = 0, 1, \dots)$. Nasuwa to przypuszczenie, że w przypadku ogólnym, gdy pole limesowalności metody normalnej permanentnej A jest częścią pola limesowalności metody permanentnej B, to każdy ciąg limesowalny metodą A jest limesowalny metodą B do tej samej liczby. Przypuszczenie to jest błędne; co więcej zachodzi

Twierdzenie 5. *Istnieją metody normalne permanentne o wspólnem polu limesowaluości a mimo to limesujące pewne ciągi do liczb różnych.*

Można natomiast udowodnić

Twierdzenie 6. *Gdy pole limesowalności metody normalnej permanentnej A zawiera się w polu limesowalności metody permanentnej B, to każdy ciąg ograniczony limesowalny metodą A jest limesowalny metodą B do tej samej liczby.*

Załóżmy teraz, że spełnione są warunki ostatniego twierdzenia; chodzi o to, w jakim przypadku można wnioskować, że dany ciąg (nieograniczony) limesowalny metodą A jest limesowalny metodą B do tej samej liczby. Aby odpowiedzieć na to pytanie, połóżmy dla każdego ciągu $\{u_n\}$ limesowalnego metodą A

$$\|\{u_n\}\| = \text{kres górny}\left\{\left|\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} u_m\right|\right\};$$

tak określony w polu limesowalności metody A funkcjonał stanowi w nim normę i przy niej jest ono zupełne. Ponadto możnaby sprawdzić, korzystając z twierdzenia 3, że gdy położymy w nim

$$f(\{u_n\}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{n,m} u_m,$$

to uzyskany funkcjonał będzie linjowy. Niech dalej $e_0 = \{1\}$ oraz $e_n = \{x_{n,m}\}$, gdzie $x_{n,m} = 1$ dla $n = m+1$ i $= 0$ dla $n \neq m+1$ $(n = 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots)$. Przypuśćmy, że ciąg $e = \{u_n\}$ jest limesowalny metodą A do U; gdy element e daje przedstawienie postaci

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n e_n,$$

gdzie $\{\vartheta\}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych, to musi być $\vartheta = U$, $\vartheta_n = u_{n-1} - U$ $(n = 1, 2, \dots)$ i, jak stąd w jednej chwili wynika, $f(\{u_n\}) = U$. Z drugiej strony, wobec przyjętej definicji normy w polu limesowalności metody A, na to by zachodziło wzmiankowane rozwinięcie, potrzeba i wystarcza, by ciąg $\{u_n - U\}$ był limesowalny metodą A jednostajnie, t. zn. by do każdego $\varepsilon > 0$ istniało naturalne m_0 takie, że

$$\left| \sum_{p=m}^{\infty} a_{n,p}(u_p - U) \right| < \varepsilon$$

dla $m \geq m_0$, $n = 0, 1, \dots$ W ten sposób uzyskujemy

Twierdzenie 7. *Gdy pole limesowalności metody normalnej permanentnej A zawiera się w polu limesowalności metody permanentnej B, to ciąg $\{u_n\}$ limesowalny metodą A do U jest lime-*

sowalny metodą B do tej samej liczby, o ile tylko ciąg $\{u_n - U\}$ jest limesowalny metodą jednostajnie.

Widać teraz, że na to by metoda normalna permanentna A miała tę własność, że gdy jej pole limesowalności zawiera się w polu limesowalności jakiejś metody permanentnej B, to każdy ciąg limesowalny metodą A jest limesowalny metodą B do tej samej liczby, wystarcza by ciąg $\{a_n\}$ stanowił bazę[5)] w polu limesowalności metody A; przypadek ten jest właśnie zrealizowany dla metod Cesàro i Eulera.

III.

Podane twierdzenia o funkcjonałach addytywnych i jednorodnych w polach ciągów przenoszą się oczywiście na przypadek, gdy chodzi nie o pola ciągów lecz szeregów. Specjalnie każda metoda sumowalności Toeplitz'a prowadzi do określenia funkcjonału addytywnego i jednorodnego w pewnem polu szeregów, które nazywa się polem sumowalności tej metody. Jeżeli chodzi o metody sumowalności, to warto dla uzyskania pewnej analogji z teorją zbieżności szeregów wprowadzić pojęcie szeregów bezwarunkowo i warunkowo sumowalnych. Niech A będzie metodą sumowalności Toeplitz'a i przypuśćmy, że dany szereg jest nią sumowalny (do U); otóż nazywamy go sumowalnym metodą A bezwarunkowo (do U), gdy każdy szereg różniący się od niego conajwyżej porządkiem wyrazów jest

---

[5)] Definicję tego terminu zawiera praca: J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Mathematische Zeitschrift, XXVI, 1927.

sumowalny metodą A i to stale do tej samej liczby; w razie przeciwnym powiadamy, że jest sumowalny metodą A warunkowo (do U)[6]. Jest widocznem, że w przypadku n. p. metod Cesàro lub Eulera pojęcie szeregów bezwarunkowo sumowalnych pokrywa się z pojęciem szeregów bezwzględnie zbieżnych; istnieją jednak permanentne metody sumowalności, przy których to nie zachodzi. Powstaje pytanie, kiedy dana metoda sumowalności posiada tę własność, że do szeregów warunkowo sumowalnych przy użyciu jej odnosi się twierdzenie analogiczne do twierdzenia Riemann'a, dotyczącego szeregów warunkowo zbieżnych. W tym kierunku zachodzi przedewszystkiem

Twierdzenie 8. *Gdy α, β są liczbami rzeczywistemi, to istnieje szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o tej własności, że gdy r jest liczbą postaci $\alpha t + \beta$ przy t całkowitem to przez odpowiednią zmianę porządku wyrazów można uzyskać z szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ szereg sumowalny metodą H_1 do r, ale przez żadną zmianę porządku wyrazów nie można z niego otrzymać szeregu sumowalnego metodą H_1 do jakiejś liczby nie będącej wzmiankowanej postaci.*

Przytem prawdziwem jest jednak

Twierdzenie 9. *Gdy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest szeregiem warunkowo sumowalnym metodą H_k (k naturalne) i ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony,*

---

[6] Badaniu szeregów warunkowo sumowalnych poświęcona jest moja praca „O szeregach warunkowo sumowalnych", która będzie drukowana w Sprawozdaniach Towarzystwa Naukowego we Lwowie.

to do każdej liczby rzeczywistej r można dobrać szereg różniący się conajwyżej porządkiem wyrazów od szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, sumowalny metodą H_k do r.

J. v. Neumann (Berlin)

Zur Theorie des Masses

Gewisse Resultate von Hausdorff, Banach und Tarski über die Möglichkeit bzw. Unmöglichkeit eines allgemeinen (d. h. für alle beschränkten Teilmengen des n-dimensionalen Euklidischen Raumes definierten) Masses werden analysiert.

Die genannten Autoren untersuchten u. a. solche Masse (d. h. nichtnegative, für zwei elementfremde Mengen - Addenden additive und nicht identisch verschwindende Mengenfunktionen), welche gegenüber der Gruppe der orthogonalen Abbildungen des Raumes invariant sind. Insbesondere zeigten Banach und Tarski, dass ein solches Mass dann und nur dann möglich ist, wenn der Raum 1- oder 2-dimensional ist.

Es scheint also eine eigentümliche neue Eigenschaft des Raumes von 3 Dimensionen aufwärts vorzulegen.

Es zeigt sich nun, dass die genannte Eigenschaft genauer der Gruppe der orthogonalen Abbildungen zuzuschreiben ist. Diese ist nämlich für 1, 2 Dimensionen auflösbar (d. h. sie hat eine Kette successiver Normalteiler mit lauter Abelschen Faktorgruppen), von 3 an aber besitzt sie eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden und es lässt sich zeigen dass diese Eigenschaften im wesentlichen für die Existenz bzw. nicht Existenz eines, dieser Gruppe gegenüber invarianten Masses hinreichend sind.

Wenn man Invarianz gegenüber Abbildungs-Gruppen verlangt, ändert sich demgemäss das Bild: bei der affinen Gruppe (bestehend aus allen linearen Abbildungen von der Determinante 1) z. B. tritt dieser Wechsel zwischen 1 und 2 Dimensionen ein – daher existiert dann das Mass nur im 1-dimensionalen.

Es werden noch einige Beispiele für diese gruppentheoretische Bedingtheit des Masses angegeben. Eine genaue Ausführung erscheint demnächst in den Fund. Math.

Stanisław Ruziewicz (Lwów)

O funkcjach spełniających uogólniony warunek Lipschitz'a

Weźmy pod uwagę układ równań funkcyjnych:

$$f\left(\frac{x+k}{g}\right) = a_k + b_k f(x), \quad k = 0, 1, \ldots, g-1,$$

gdzie g jest liczbą naturalną ≥ 2, zaś liczby a_k i b_k spełniają dla $k = 0, 1, \ldots, g-1$ warunki:

$$|b_k| < 1, \quad b_{g-1} = 1 - \sum_{i=0}^{g-2} b_i \quad a_0 = 0, \quad a_k = \sum_{i=0}^{k-1} b_i$$

Istnieje jedna i tylko jedna funkcja ograniczona w przedziale $(0, 1)$, spełniająca powyższy układ równań; funkcja ta jest ciągła w tym przedziale.

Dobierając odpowiednio liczby b_k, otrzymujemy funkcje ciągłe o różnych osobliwościach.

W szczególności, dobierając do dowolnej liczby dodatniej $a < 1$ odpowiednie liczby b_k, otrzymujemy funkcję, spełniającą nierówność

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|^a, \quad (M \text{ jest stałą}), \tag{1}$$

a nie posiadającą dla żadnej wartości x pochodnej (ani skończonej, ani nieskończonej)[1].

Dalej, istnieje funkcja $f(x)$, spełniająca nierówność

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y| \cdot \big|\log|x - y|\big|,$$

nie posiadająca dla żadnej wartości x skończonej pochodnej.

Wreszcie przez odpowiedni obiór liczb b_k otrzymujemy dla każdej liczby dodatniej $a < 1$ funkcję rosnącą, spełniającą warunek (1), a posiadającą pochodną 0 wszędzie, z wyjątkiem pewnego zbioru miary Lebesgue'a zero [2].

---

[1] Por. S. Ruziewicz, Sur les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée, (Annales de la Soc. Pol. de Math., T. VII, 1928).

[2] Por. S. Ruziewicz: Un exemple d'une fonction continue croissante ayant presque partout la dérivée nulle. (C. R. de séance de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie XX, 1928)

S. Steckel (Kielce)

O warunku sumowalności ciągu nieskończonego o dwuch miejscach skupienia

Niech będą dane dwa ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ liczb zespolonych takie, iż $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ i $a \neq b$. Niech dalej $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$ oznaczają dwa ciągi nieskończone liczb naturalnych. Utwórzmy ciąg $\{c_n\}$ w sposób następujący: wypisujemy p_1 pierwszych wyrazów ciągu $\{a_n\}$, następnie q_1 pierwszych wyrazów ciągu $\{b_n\}$, dalej p_2 dalszych wyrazów ciągu $\{a_n\}$ i q_2 dalszych wyrazów ciągu $\{b_n\}$ i t. d. Połóżmy: $P_0 = 0$, $Q_0 = 0$, $P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, $Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$. Można z łatwością udowodnić następujące twierdzenie:

Na to, aby ciąg $\{c_n\}$ był sumowalny metodą średnich Cesàro rzędu k (k dowolna liczba rzeczywista ≥ 1) potrzeba i wystarcza, aby istniały granice (skończone lub nie): $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{Q_n}$ i aby było $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{Q_n}$.

Opierając się na tem twierdzeniu, można z łatwością efektywnie zbudować ciąg, złożony z jedynek i zer, niesumowalny $(C\ k)$ dla żadnego $k \geq 1$[1]. Ciąg $\{c_n\}$ o tej własności otrzymujemy np. kładąc: $c_n = 1$ jeżeli: $2^\nu - 1 \leq n \leq 2^\nu + 2^{\nu-1} - 2$, zaś: $c_n = O$ jeżeli: $2^\nu + 2^{\nu-1} - 1 \leq n \leq 2^{\nu+1} - 2$ dla $\nu = l, 2, 3, \ldots$

Opierając się na powyższem twierdzeniu, można również z łatwością określić taką zmianę porządku wyrazów danego ciągu liczb zespolonych o dwuch miejscach skupienia a i b $(a \neq b)$, aby otrzymany w ten sposób ciąg był sumowalny do dowolnej liczby α kształtu: $a + (b - a)t$, gdzie: $0 \leq t \leq 1$[2].

---

[1] Prof. Steinhaus udowodnił jeszcze w r. 1911 (Prace mat.-fiz. XXII, str. 121 i nast.) ogólniejsze twierdzenie, ze istnieje ciąg złożony z jedynek i zer, niesumowalny żadną metodą Toeplitz'a; twierdzenie to wysnuł prof. Steinhaus z rozważań natury ogólnej o uogólnieniach pojęcia granicy. Jeżeli zaś chodzi o rozpatrywany tutaj szczególny przypadek niesumowalności metodą średnich Cesàro, to konstrukcja oparta na podanem wyżej twierdzeniu jest znacznie prostsza.

[2] Zbiór liczb: $\alpha = a + (b - a)t$, gdzie: $0 \leq t \leq 1$ (zbiór punktów odcinka wyznaczonego przez liczby a i b) jest, jak łatwo widzieć, zbiorem wszystkich punktów sumowalności ciągów, jakie można otrzymać z ciągu danego przez zmianę porządku wyrazów.

Hugo Steinhaus (Lwów)

Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie de séries orthogonales

En se servant du calcul fonctionnel, comme l'a fait M. Banach dans une Note sur une propriété de systèmes orthogonaux[2)] on obtient les résultats suivants:

A) Si $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ sont deux suites données, normées et orthogonales, composées de fonctions continues $\{\psi_n\}$, étant en outre complète dans le champ de fonctions continues et si la suite numérique donnée $\{\lambda_k\}$ a la propriété de transformer tout développement par rapport aux φ d'une fonction continue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(\tau) \tag{1}$$

Résumé de la prélection C 6. Le texte complet paraîtra dans les „Studia Mathematica", I (1929).

2) C. R. de l'Académie des Sciences, Paris, 2 juin 1925, (T 180, N° 22, pp. 1637–1640).

en un développement par rapport aux ψ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \psi_k(\tau) \tag{2}$$

d'une fonction continue, alors la convergence uniforme d'une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(\tau)$$

implique la convergence uniforme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k \psi_k(\tau).^{3)}$$

B) Sans changer l'hypothèse du théorème précédent on peut y remplacer la thèse par une autre, plus générale:

La convergence uniforme d'une série de polynomes en φ

$$(\xi_1 \varphi_{n_1} + \cdots + \xi_j \varphi_{n_j}) + (\eta_1 \varphi_{p_1} + \eta_k \varphi_{p_k}) + \ldots \tag{3}$$

implique – quels que soient les $j, k, n_1, \ldots, n_j, p_1, \ldots, p_k, \ldots, \xi, \eta$ choisis – la convergence uniforme de la série transformée

$$(\lambda_{n_1} \xi_1 \varphi_{n_1} + \ldots) + (\lambda_{p_1} \eta_1 \psi_{p_1} + \ldots) \tag{4}$$

de polynomes en ψ.

---

[3] Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 1$ ou obtient le théorème de M. Banach.

C) La réciproque du théorème B) est vraie.

D) Pour que la convergence uniforme d'une série (3) implique toujours la convergence uniforme de (4), il faut et il suffit qu'il existe une constante C, indépendante de $j, n_1, n_2, \ldots, n_j$, $\xi_1, \ldots, \xi_j$ telle que l'on ait

$$\begin{aligned} &\underset{\alpha\leq\tau\leq\beta}{Maximum} \text{ de } |\xi_1\varphi_{n_1}(\tau) + \cdots + \xi_j\varphi_{n_j}(\tau)| \leq \\ &\leq C. \underset{\alpha\leq\beta\leq\tau}{Maximum} \text{ de } |\lambda_{n_1}\xi_1\psi_{n_1}(\tau) + \cdots + \lambda_{n_j}\psi_{n_j}(\tau)|. \end{aligned} \tag{5}$$

Les théorèmes B) C) et D) conduisent immédiatement au théorème:

E) Pour que la suite transforme toujours un développement d'une fonction continue (1) en un développement d'une fonction continue (2) – $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ ayant les propriétés spécifiées au début – il faut et il suffit qu'il existe une constante C remplissant l'inégalité (5) quels que soient les $n_1, n_2, \ldots, n_j$, $\xi_1, \ldots, \xi_j$ et j.

F) On peut énoncer les mêmes résultats en employant d'autres modes de convergence, p. e. la „convergence en moyenne avec la p-ième puissance" ($p > 1$) et même on peut employer un mode différent pour les φ et pour les ψ. On change alors convenablement l'inégalité (5). Le cas $p = 1$ présente des difficultés spéciales.

Tadeusz Ważewski (Kraków)

Pewne twierdzenie o funkcjach mających pochodną. Wnioski

Twierdzenie[1]:

Jeżeli A jest zbiorem mierzalnym zawartym w przedziale $[a, b]$, zaś $f(x)$ funkcją, mającą w każdym punkcie tego zbioru pochodną *różną od zera* (skończoną lub nie), to do każdego $\varepsilon \geq 0$ należy

1°) podzbiór A_1 zbioru A o mierze $< \varepsilon$

2°) podział przedziału $[a, b]$ na przedziały $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ o tej własności, że funkcja $f(x)$ rozpatrywana na którymkolwiek ze zbiorów

$$\Delta_i.(A - A_1) \quad (i/l, 2, \ldots, n)$$

jest monotoniczną w znaczeniu ściślejszem.

[1] Twierdzenie to jest przedmiotem noty, którą wysłałem był Prof. Lebesgue'owi. Jest ono uogólnieniem pewnego twierdzenia ogłoszonego w mej pracy: Kontinua prostowalne etc.

Oto niektóre wnioski.

I. Jeżeli funkcje

$$\varphi_\nu(t) \quad (\nu/1, \ldots, n)$$

posiadają niemal wszędzie w przedziale $[a, b]$ pochodną skończoną, to istnieje zbiór miary zero B taki, że gdy

$$t_1 \in [a, b] - B$$
$$t_2 \in [a, b] - B$$
$$\varphi_\nu(t_1) = \varphi_\nu(t_2) \quad (\nu/1, \ldots, n)$$

to macierz

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1'(t_1), & \ldots, & \varphi_n'(t_1) \\ \varphi_1'(t_2), & \ldots, & \varphi_n'(t_2) \end{Vmatrix}$$

jest rzędu mniejszego od 2.

II. Jeżeli funkcje

$$\varphi_\nu(t) \quad (\nu/1, \ldots, n)$$

są absolutnie ciągłe w przedziale $[a, b]$ $(a < b)$ to długość (w sensie Janzena lub Peany) kontinuum opisanego przez punkt

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$$

wynosi

$$\int_a^b \frac{\sqrt{\sum_{\nu/1}^n [\varphi_\nu'(t)]^2}}{m(t)}\, dt$$

gdzie $m(t)$ oznacza krotność punktu t, t. j. ilość liczb σ spełniających system równań

$$\varphi_\nu(\sigma) = \varphi_\nu(t) \quad (\nu/1, \ldots, n).$$

Jeżeli krotność jest dla pewnego t nieskończona, przyjmujemy w powyższym wzorze

$$\frac{1}{m(t)} = 0.$$

III. Jeżeli Kv jest ciągiem kontinuów prostowalnych, dla których

$$K_\nu \subset K_{\nu+1} \quad (\nu/1, 2, \ldots)$$
$$\text{długość } K_\nu < a < +\infty$$

i jeżeli K_0 jest kontinuum określonem przez związek

$$K_0 = \overline{\sum_{\nu/1}^{\infty} K_\nu},$$

to

$$\text{długość } K_0 = \text{długość } \overline{\sum_{\nu/1}^{\infty} K_\nu} = \text{długość } \sum_{\nu/1}^{\infty} K_\nu.$$

Inaczej

$$\text{długość} \left(\overline{\sum_{\nu/1}^{\infty} K_\nu} - \sum_{\nu/1}^{\infty} K_\nu \right) = 0.$$

IV. Jeżeli K jest kontinuum prostowalnem, jeżeli

$$K_0, K_1, K_2, K_3, \ldots$$

są podkontinuami K, to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by

$$\lim_{\nu/\infty} \text{długość } K_\nu = \text{długość } K_0$$

jest, by kontinuum K_ν zmierzało do kontinuum K_0 w sensie Hausdorffa.

III i IV dowodzę niezależnie od twierdzenia naczelnego.

Antoni Zygmund (Warszawa)

Kilka uwag o zbiorach jednoznaczności w teorji całek trygonometrycznych

Zbiorem Cantorowskim jednoznaczności w teorji *szeregów trygonometrycznych* nazywamy zbiór E położony w przedziale $(0, 2\pi)$ i posiadający tę własność, że każdy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

zbieżny wszędzie w uzupełnieniu zbioru E do zera, ma wszystkie spółczynniki równe zeru: $a_n = b_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Analogicznie zbiorem Cantorowskim jednoznaczności dla *całek trygonometrycznych* nazywamy zbiór E leżący w przedziale $(-\infty, +\infty)$ i taki, że dla każdej całki trygonometrycznej

$$\int_0^{\infty} (a_s \cos sx + b_s \sin sx)\, ds; \qquad \lim_{\mu\to\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} (|a_s| + |b_s|)\, ds = 0$$

zbieżnej w uzupełnieniu zbioru E do zera, mamy dla *prawie wszystkich* wartości s: $a_s = b_s = 0$.

Treścią referatu jest udowodnienie twierdzenia, że zbiory jednoznaczności w teorji szeregów oraz całek trygonometrycznych są te same oraz rozszerzenie tego wyniku na inne zbiory jednoznaczności, które w odróżnieniu od Cantorowskich możnaby nazwać Du-Bois–Reymond'owskiemi.

Wacław Sierpiński (Warszawa)

Uwaga o twierdzeniu Jegorowa

W myśl znanego twierdzenia Jegorowa, jeżeli $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest ciągiem nieskończonym funkcyj mierzalnych, zbieżnym w przedziale $I(O \leq x \leq 1)$, to dla każdej liczby dodatniej ε istnieje zbiór E o mierze zewnętrznej $> 1 - \varepsilon$, zawarty w I, i taki, że ciąg $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ jest zbieżny jednostajnie w zbiorze E. Autor dowodzi, że jeżeli hipoteza continuum $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)$ jest prawdziwa, to twierdzenie to nie jest prawdziwem dla ciągów funkcyj niemierzalnych. Mianowicie, jeżeli $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ to istnieje ciąg nieskończony zbieżny funkcyj $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, który jest zbieżny niejednostajnie w każdym zbiorze nieprzeliczalnym.

Ob. Sprawozdania Tow. Nauk. Warszawskiego XX, 1928.

Władysław Orlicz (Lwów)

O przeciętnej zbieżności rozwinięć ortogonalnych

Treścią referatu jest uogólnienie znanego twierdzenia Younga o przeciętnej zbieżności szeregów Fouriera na ogólne rozwinięcia ortogonalne oraz pewne kwestje z tem związane. Prócz tego podanych jest kilka twierdzeń o czynnikach przeprowadzających rozwinięcia ortogonalne pewnej klasy funkcyj w rozwinięcia tejże klasy.

Szczegółowe wysłowienie twierdzeń wraz z dowodami znajduje się w pracy p. t. „Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen" §§ 2, 3, ogłoszonej w tomie I. Studia mathematica (r. 1929).

N. Bary (Moskwa): *Sur la représentation finie des fonctions continues.*

Voir Comptes Rendus 184 (1927), p. 112 et 186 (1928), p. 1414

M. Łuzin (Moskwa): *Sur l'existence des ensembles non mesurables B.*

A. Grużewski (Warszawa): *O pewnym zagadnieniu Urysohna*.

Stefan Banach (Lwów): 1. *O metodzie majorant Cauchy'ego w teorji funkcjonałów*.

2. *O szeregach funkcyjnych warunkowo zbieżnych*.

3. *Krótki dowód istnienia wartości charakterystycznej jądra symetrycznego*.

Dział III. Analiza i algebra

Władysław Nikliborc (Lwów)

O nowych zagadnieniach rachunku wariacyjnego i zasadzie Hamiltona w dynamice

§ 1. Niechaj będzie dany dynamiczny układ materjalny o n stopniach swobody. Przez q_i oraz $\dot{q}$ oznaczać będziemy – jak zwykle się to robi[1)] – t. zw. uogólnione współrzędne względnie uogólnione prędkości. Niechaj T oznacza energję kinetyczną układu. Jeżeli warunki wiążące były holonomiczne[2)], wówczas ruch układu jest określony równaniami różniczkowemi Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

---

1) Por. P. Appell. Traité de Mécanique rationelle. T. II. (1896). Str. 332 i nast.

2) Zob. np. Whittaker. Analytische Dynamik. Berlin. Springer 1924. Str. 36.

gdzie Q_i oznaczają t. zw. uogólnione siły[3]. Zarówno T jak i Q, są w najogólniejszym wypadku funkcjami zmiennych $t, q_k, \dot{q}_k$.

W dynamice rozróżnia się dwa zasadnicze wypadki:

a) Funkcje Q_i zależą jedynie od zmiennych t, q_k, przyczem istnieje taka funkcja V, zwana potencjałem, że

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

b) założenia poprzedniego przypadku nie są spełnione.

W wypadku a)), wprowadzając funkcję $L = T - V$ zwaną potencjałem kinetycznym, możemy równania (1) napisać w formie

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Wynika stąd, że jeżeli oznaczymy przez A pozycję układu w chwili t_1 zaś przez B pozycję układu w chwili t_2, wówczas dla trajektorji rzeczywistej zachodzi wzór

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \tag{3}$$

ze względu na wszystkie inne możliwe trajektorje, zgodne z warunkami układu, i przeprowadzające układ z pozycji A w chwili t_1 do pozycji B w chwili t_2.

---

[3] Np. Whittaker, l. c. str. 39.

Związek (3) wyraża dobrze znaną zasadę Hamiltona, którą można wypowiedzieć w formie następującej[4]:

„*W dynamicznym układzie materjalnym o n stopniach swobody, holonomicznym, w którym nadto istnieje potencjał kinetyczny, rzeczywistą trajektorją, przeprowadzającą układ z pozycji A w chwili* t_1, *do pozycji B w chwili* t_2, *jest jedna z tych trajektorji, dla której warjacja całki*

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{4}$$

jest zerem, przyczem do porównania są dopuszczone wszystkie trajektorje przeprowadzające układ, z pozycji A w chwili t_1 *do pozycji B w chwili* t_2 *zgodnie z warunkami wiążącemi*".

W tym więc wypadku rola równań (1) względnie (2) może być określoną przez powiedzenie, iż równania te są Eulerowskiemi równaniami różniczkowemi, należącemi do problematu warjacyjnego całki (4).

W wypadku b)) równania (1) naogół nie są równaniami Eulerowskiemi żadnego problematu warjacyjnego[5]. Rozważanie tego właśnie wypadku doprowadziło mię do uogólnienia klasycznych problematów rachunku warjacyjnego takiego, że:

---

[4] Zob. np. Appell, 1. c. T. II. Str. 426 i nast. Także Bolza. Variationsrechnung. Leipzig 1904. Str. 554.

[5] Appell, 1. c.[4]). Str. 423–426.

a) dotychczasowe klasyczne problematy warjacyjne bez warunków ubocznych będą się zawierały w tej ogólniejszej, sformułowanej przezemnie klasie zagadnień,

b) równania (1) będą w *każdym* wypadku równaniami różniczkowemi, należącemi do jakiegoś uogólnionego zagadnienia warjacyjnego w tym sensie, w jakim równania (2) należą do problematu warjacyjnego (3).

W szczególności będziemy potem mogli nadać zasadzie Hamiltona nową formę ogólniejszą niż dotychczas.

§ 2. W ustępie niniejszym sformułujemy nową klasę zagadnień w wypadku możliwie prostym, t. zn. gdy mamy do czynienia z jedną tylko funkcją niewiadomą, przyczem pod całką występują jedynie pochodne pierwszego rzędu funkcji niewiadomej.

Niechaj (R) oznacza dowolny obszar płaski, spójny. Oznaczmy przez $(\mathfrak{T})$ zbiór wszystkich takich punktów przestrzeni 5-cio wymiarowej zmiennych

$$x, y, y', \bar{y}, \bar{y}',$$

których spółrzędne spełniają warunki następujące:

1° (x, y) oraz $(x, \bar{y})$ należą do (R)

2° $-\infty < y' < +\infty, -\infty < \bar{y}' < +\infty.$

Oznaczmy przez $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ dwa dowolne punkty obszaru (R) takie, że

$$x_l < x_2.$$

Niechaj $(\mathfrak{M})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $\bar{y}(x)$, które mają własności:

1° są w przedziale zamkniętym klasy (C'')[6)]

2° spełniają warunki

$$\bar{y}(x_1) = y_1, \quad \bar{y}(x_2) = y_2$$

3° dla każdego x z $[x_1, x_2]$ punkt $\{x, \bar{y}(x)\}$ leży wewnątrz (R).

Niechaj wreszcie daną będzie funkcja $f(x, y, y', \bar{y}, \bar{y}')$ określona w $(\mathfrak{T})$ i klasy (C'') tamże. Stawiamy teraz zagadnienie:

„*Wyznaczyć w zbiorze* $(\mathfrak{M})$ *taką funkcję* $y(x)$, *aby dla każdej innej funkcji tego zbioru zachodziła nierówność*

$$\int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x), \bar{y}(x), \bar{y}'(x)]\, dx \geq \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x), y(x), y'(x)]\, dx.\text{”}$$

§ 3. Stosując zwyczajne metody klasycznego rachunku warjacyjnego, dochodzimy z łatwością do twierdzenia:

„*Warunkiem koniecznym na to, aby funkcja* $y(x)$ *była rozwiązaniem postawionego zagadnienia, jest, żeby spełniała równanie różniczkowe*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = 0,$$

---

6) Co do tego określenia zob. Bolza: „Variationsrechnung”, str. 13.

przyczem pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}$ *mają być obliczone dla argumentów*

$$x, y(x), y'(x), y(x), y'(x).\text{”}$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że postawione zadanie będzie naogół miało rozwiązanie i to naogół w tym samym stopniu ogólności, jak w najprostszem zadaniu klasycznem.

§ 4. Rzecz oczywista, że można rozważać analogiczny problemat z n funkcjami niewiadomemi. Umówmy się dla krótkości oznaczać punkt $4n + 1$ wymiarowej przestrzeni zmiennych

$$x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{y}_1', \ldots, \bar{y}_n'$$

przez $(x, y_i, y_i', \bar{y}_i, \bar{y}_i')$ i analogicznie punkt $n + 1$ wymiarowej przestrzeni zmiennych

$$x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$$

krótko przez $(x, \bar{y}_i)$.

Niech będą dane dwa punkty $A(x, y_i^{(1)})$ oraz $B(x, y_i^{(2)})$ przestrzeni $n + 1$ wymiarowej. Pomijając założenia możemy postawić zadanie:

„*W zbiorze układów funkcji* $\{\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)\}$ *spełniających warunki*

$$\bar{y}_i(x_1) = y_i^{(1)}$$
$$\bar{y}_i(x_2) = y_i^{(2)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wyznaczyć taki układ szczególny $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$, *aby dla każdego innego układu* $\{\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)\}$ *z tego zbioru zachodziła nierówność*

$$\begin{gathered}\int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y_i'(x), \bar{y}_i(x), \bar{y}_i'(x)]\, dx \geq \\ \int_{x_1}^{x_2} f[x, y_i(x), y_i'(x), y_i(x), y_i'(x)]\, dx,\end{gathered} \tag{5}$$

gdzie f *oznacza daną funkcję punktu przestrzeni zmiennych* $(x, y_i, y_i', \bar{y}_i, \bar{y}_i')$".

Z łatwością można stwierdzić, że *jeśli układ* $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ *jest rozwiązaniem postawionego zadania, to spełnia układ równań różniczkowych*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i'} - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

§ 5. W ustępie tym zmienimy oznaczenia, kładąc

$$x = t,\ y_i = q_i,\ y_i' = \dot{q}_i,\ \bar{y}_i = \bar{q}_i,\ \bar{y}_i' = \dot{\bar{q}}_i. \tag{7}$$

Niechaj będą dane funkcje

$$T(\bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_i, t),\ Q(\bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_i, t), \ldots,\ Q_n(\bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_i, t).$$

Połóżmy

$$\begin{aligned} f(t, q_i, \dot{q}_i, \bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_i) = {} & T(\bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_i, t) \\ & + \sum_{k=1}^{n} Q_k(\bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_i, t)(\bar{q}_k - q_k) \end{aligned} \tag{8}$$

i sformułujemy dla tej funkcji f zadanie, podane w ustępie poprzednim.

Mamy więc dane dwa punkty $A(t_1, q_i^{(1)})$ $B(t_2, q_i^{(2)})$ oraz zbiór wszystkich układów funkcji $\{\bar{q}_i(t), \ldots, \bar{q}_n(t)\}$ takich, że

$$\begin{aligned} \bar{q}_i(t_1) &= q_i^{(1)} \\ \bar{q}_i(t_2) &= q_i^{(2)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Chodzi o znalezienie takiego szczególnego układu funkcji $\{q_1(t), \ldots, q_n(t)\}$ w tym zbiorze, aby dla każdego innego układu $\{\bar{q}_1(t), \ldots, \bar{q}_n(t)\}$ zbioru zachodziła nierówność

$$\int_{t_1}^{t_2} f[t, q_i(t), \dot{q}_i(t), \bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t)]\, dt \geq \\ \int_{t_1}^{t_2} f[t, q_i(t), \dot{q}_i(t), q_i(t), \dot{q}_i(t)]\, dt,$$

czyli w tym wypadku z uwagi na wzór (8) nierówność

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ T[q_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t] \\ + \sum_{k=1}^{n} Q_k[\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t].[\bar{q}_k(t) - q_k(t)] \Big\}\, dt \geq \qquad (9) \\ \int_{t_1}^{t_2} T[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]\, dt.$$

Warunki konieczne na funkcje $q_i(t)$, t. zn. równania (6) przybiorą ze względu na oznaczenia (7) formę:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{q}}_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{q}_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

przyczem pochodne $\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_k}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{q}}_k}$ należy obliczyć dla argumentów

$$t, q_i(t), \dot{q}_i(t), q_i(t), \dot{q}_i(t).$$

Z uwagi na to oraz na wzór (8) równania te przybiorą postać

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}_k} - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

Tutaj pochodne $\frac{\partial T}{\partial \bar{q}_k}$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}_k}$ oraz funkcje Q_k mają być określone dla argumentów

$$t, q_i(t), \dot{q}_i(t).$$

§ 6. Równania (10) tylko symbolistyką różnią się od równań (1) a w gruncie rzeczy są z niemi identyczne. W ten sposób stwierdzamy, że każdy układ równań kształtu (2) należy do problematu, określonego nierównością (9).

A zatem

„*Każdy układ równań różniczkowych Lagrange'a należy do pewnego »uogólnionego« problematu warjaryjnego, a mianowicie do problematu, wyrażonego nierównością* (9)".

Fakt ten prowadzi nas do nadania zasadzie Hamiltona następującej ogólniejszej formy:

„*W każdym dynamicznym układzie materjalnym o n stopniach swobody, holonomicznym, rzeczywistą trajektorją, przeprowadzającą układ z pozycji A w chwili* t_1 *do pozycji B w chwili* t_2, *jest jedna z tych trajektorji* $q_i(t)$, *dla której spełnione są warunki konieczne na to, aby zachodziła nierówność*

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ T[\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t] + \sum_{k=1}^{n} Q_k[\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t].[\bar{q}_k(t) - q_k(t)] \Big\} \, dt \geq \int_{t_1}^{t_2} T[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] \, dt.$$

przyczem do porównania są dopuszczone wszystkie trajektorje $\bar{q}_k(t)$, *przeprowadzające układ z pozycji A w chwili* t_1 *do pozycji B w chwili* t_2 *zgodnie z warunkami wiążącemi*".

Czytelnika interesującego się bliżej temi kwestjami odsyłamy do naszej pracy p. t. „*Sur une nouvelle classe des problèmes du calcul des variations*" w »Annales de la Société Mathématique Polonaise«.

Kazimierz Abramowicz (Poznań)

O przekształceniu funkcyj automorficznych wielu zmiennych

(Streszczenie)

Zadanie, podane przez Poinecarégo w rozprawie: Sur les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique o przekształceniu funkcyj Fuchsa, może być uogólnione na funkcje automorficzne wielu zmiennych. W przypadku funkcji automorficznej $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, należącej do grupy nieciągłej G, zadanie będzie polegało na wyznaczeniu warunków, przy których istnieje zależność algebraiczna między funkcją f i funkcją przekształconą za pomocą pewnego podstawienia S, nie należącego do grupy G. Naogół nie dla każdej funkcji automorficznej f istnieć będzie takie podstawienie S, dla którego zachodzić będzie wspomniana zależność algebraiczna; będzie to zachodziło tylko wyjątkowo dla poszczególnych funkcyj, i pierwszym celem będzie wyznaczenie tych funkcyj, dla których zadanie o przekształceniu jest możliwe. Zadanie nasze możemy sformułować tak:

jaką ma być grupa nieciągła G funkcji automorficznej $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ażeby istniała grupa ciągła g, której każde podstawienie S po zastosowaniu do funkcji f daje nową funkcję, związaną z poprzednią zależnością algebraiczną.

Bierzemy pod uwagę grupy t. z. kwadratowe i grupy linjowe lub hyperfuchsowe. Co do grup kwadratowych okazujemy, że twierdzenie Poincarégo o przekształceniu funkcyj fuchsowych arytmetycznych rozciąga się na funkcje należące do grupy kwadratowej o spółczynnikach całkowitych wymiernych. W przypadku funkcyj hyperfuchsowych podajemy metodę, która pozwala wyznaczyć przypadki, w których istnieje funkcja hyperfuchsowa f, jak również i grupa ciągła g, której każde podstawienie zastosowane do funkcji f daje nową funkcję, związaną z poprzednią zależnością algebraiczną.

Metoda opiera się na badaniu punktów stałych grupy hyperfuchsowej G, co do których dowodzimy twierdzenie, że punkty te pozostają bez zmiany przy podstawieniach grupy ciągłej g; twierdzenie to prowadzi do wyznaczenia grupy G.

Franciszek Leja (Warszawa)

Sur la frontière du domaine de convergence des séries entières doubles

1. Le but de cette communication est d'indiquer une certaine propriété des points de divergence d'une série entière double

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}, \tag{1}$$

concernant la répartition de ces points sur la frontière du domaine de la convergence absolue des séries (1). Tout d'abord je vais démontrer uu théorème concernant les séries simples

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

formées par les différentes lignes de la série (1) et ensuite je donne une application de ce théorème pour le but indiqué.

2. Appelons *ensemble d'unicité* chaque ensemble (E) des points du plan complexe tels que, si deux séries entières simples $\sum a_\nu x^\nu$ et $\sum b_\nu x^\nu$ convergent et prennent les mêmes valeurs en chaque point de (E); ces séries sont toujours identiques.

Théorème. *Si une série entière double* (1) *converge*[1] *aux points* (x_0, y), *où* x_0 *est fixe et* y *parcourt un ensemble d'unicité* (E), *toutes les lignes de cette série*

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x_0^\mu, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

convergent au point x_0.[2]

Démonstration: Sans nuire à la généralité on peut supposer que $x_0 = 1$. Posons

$$\sum_{i=0}^{\mu} a_{ij} = \sigma_\mu^{(j)}$$

et

$$s_{\mu\nu}(y) = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} a_{ij} y^j = \sigma_\mu^{(0)} + \sigma_\mu^{(1)} y + \cdots + \sigma_\mu^{(\nu)} y^\nu \tag{2}$$

[1] Au sens de M. Pringsheim, v. Pringsheim: Vorles. üb. Zahlenlehre, Leipzig 1916.

[2] On sait, qu'une série double peut converger sans qu'une seule ligne de cette série soit convergente.

et supposons que la suite double (2) des sommes partielles de la série (1) converge

$$s_{\mu\nu}(y) \to s(y) \tag{3}$$

pour μ et $\nu \to \infty$ dans un ensemble d'unicité (E) des y.

Je dis d'abord que chacune des suites simples

$$\sigma_0^{(j)}, \sigma_1^{(j)}, \dots, \sigma_\mu^{(j)}, \dots; \quad j = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

est bornée. Eu effet, étant

$$s_{\mu\nu}(y) - s_{\mu,\nu-1}(y) = \sigma_\mu^{(\nu)} y^\nu \to 0$$

pour μ et $\nu \to \infty$ et pour chaque y appartenant à (E) on voit que, y étant fixé, il existe un indice p tel qu'on a

$$|\sigma_\mu^{(\nu)} y^\nu| < 1, \quad \text{pour } \nu > p \text{ et } \mu > p,$$

donc toutes les suites (4) pour lesquelles $j > p$ sont bornées.

Soient $y_0, y_1, \dots, y_p$, $p + 1$ points de (E) différents entre eux[3]. D'après (2) et (3) il existe un indice $q \geq p$ tel qu'on a

$$|\sigma_\mu^{(0)} + \sigma_\mu^{(1)} y + \dots + \sigma_\mu^{(\nu)} y^\nu - s(y)| < 1,$$

pour μ et $\nu \geq q$ et pour chaque $y = y_0, y_1, \dots, y_r$. Il s'en suit que la suite

$$\sigma_\mu^{(0)} + \sigma_\mu^{(1)} y + \dots + \sigma_\mu^{(p)} y^p, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots$$

[3] L'ensemble (E) est, comme on sait, toujours infini.

est bornée pour $y = y_0, y_1, \ldots, y_p$ et, par conséquent, les suites

$$\sigma_\mu^{(0)}, \sigma_\mu^{(1)}, \ldots, \sigma_\mu^{(p)}; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

sont bornées.

Supposons maintenant que les suites (4) ne soient pas convergentes et que, en particulier, on ait

$$\sigma_{p_k}^{(0)} \to a_0 \quad \text{et} \quad \sigma_{q_k}^{(0)} \to b_0 \neq a_0$$

pour $k \to \infty$, où $p_1, p_2, \ldots$ et $q_1, q_2, \ldots$ désignent deux suites croissantes des nombres naturels. Posons

$$\sigma_{p_k}^{(j)} = \sigma_{k0}^{(j)} \quad \text{et} \quad \sigma_{q_k}^{(j)} = s_{k0}^{(j)}; \quad k, j = 0, 1, 2, \ldots$$

La suite simple $\sigma_{k0}^{(j)}$, $k = 0, 1, \ldots$, étant bornée quel que soit j, on peut tirer de la suite $\sigma_{k0}^{(1)}$ $k = 0, 1, \ldots$, une suite partielle, que je désignerai par $\sigma_{k1}^{(j)}$ convergente vers une limite a_1; désignons par $\sigma_{k1}^{(j)}$, $k = 0, 1, \ldots$, la suite partielle de $\sigma_{k0}^{(j)}$, $k = 0, 1, \ldots$, correspondante à $\sigma_{k1}^{(1)}$ et tirons maintenant de la suite $\sigma_{k1}^{(2)}$ une suite partielle, qui sera désignée par $\sigma_{k2}^{(2)}$, convergente vers une limite a_2 et ainsi de suite.

On a ainsi construit pour chaque j une suite des suites simples suivantes

$$\begin{gathered}\sigma_{00}^{(j)}, \sigma_{10}^{(j)}, \ldots, \sigma_{k0}^{(j)} \\ \sigma_{01}^{(j)}, \sigma_{11}^{(j)}, \ldots, \sigma_{k1}^{(j)} \\ \ldots\end{gathered}$$

dont chacune est partielle par rapport à la suite précédente et dont celle qui se trouve dans la $(j+l)$-me ligne converge vers a_j. Il s'ensuit que la suite diagonale $\sigma_{kk}^{(j)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ converge, elle aussi, vers a_j

$$\sigma_{kk}^{(j)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$$

pour tous les $j = 0, 1, 2, \ldots$

Pareillement, on peut tirer de la suite simple σ_{q_k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$ une suite partielle, que je désignerai par $s_{kk}^{(j)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, convergente pour chaque $j = 0, 1, 2, \ldots$ vers une limite b_j

$$s_{kk}^{(j)} \xrightarrow[k\to\infty]{} b_j$$

dont b_0 est spécifié plus haut et diffère de a_0.

Cela posé, je dis que les deux séries entières simples

$$\begin{gathered}a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots \\ b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots\end{gathered} \tag{5}$$

convergent et qu'elles prennent les mêmes valeurs en chaque point de l'ensemble (E). En effet, les deux suites simples $\sigma_{kk}^{(j)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ et $s_{kk}^{(j)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ étant partielles par rapport à la suite $\sigma_{\mu}^{(j)}$, ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$, posons

$$\sigma_{kk}^{(j)} = \sigma_{\alpha k}^{(j)} \quad \text{et} \quad s_{kk}^{(j)} = \sigma_{\beta k}^{(j)}; \quad k, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Les nombres naturels α_k et β_k croissent avec k vers l'infini et, lorsque k et $\nu \to \infty$, on a, d'après (3)

$$s_{\alpha_k \nu} = \sigma_{\alpha_k}^{(0)} + \sigma_{\alpha_k}^{(1)} y + \cdots + \sigma_{\alpha_k}^{(\nu)} y^{\nu} \to s(y)$$
$$s_{\beta_k \nu} = \sigma_{\beta_k}^{(0)} + \sigma_{\beta_k}^{(1)} y + \cdots + \sigma_{\beta_k}^{(\nu)} y^{\nu} \to s(y)$$

pour chaque valeur de y appartenant à l'ensemble (E); mais, comme pour $k \to \infty$

$$\sigma_{\alpha_k}^{(j)} \to a_j, \quad \sigma_{\beta_k}^{(j)} \to b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

il s'ensuit que

$$\sum a_j y^j = \sum b_j y^j$$

en chaque point de (E), donc, (E) étant un ensemble d'unicité, les séries (5) doivent être identiques et, par suite, on a $a_0 = b_0$. Le théoreme est donc démontré.

3. Désignons par (F) la frontière du domaine de la convergence absolue de la série double (1). Cette frontière peut, comme on sait[4], être représentée par deux équations de la forme

$$|y| = \varphi(|x|), \quad 0 \leq |x| \leq R \tag{6}$$

$$|x| = R. \quad 0 \leq |y| < \varphi(R) \tag{7}$$

ou, dans certains cas, par l'une d'elles seulement[5], ces équations ayant la signification suivante: Si un point $(x_0\, y_0)$ satisfait à une de ces équations, c'est-à-dire s'il est situé sur la frontière (F), la série (1) converge absolument en chaque point (x, y) pour lequel $|x| < |x_0|$ et $|y| < |y_0|$ et, en même temps, elle diverge absolument en chaque point (x, y) pour lequel $|x| > |x_0|$ et $|y| > |y_0|$.

Posons

$$F = C + D$$

où C désigne l'ensemble des points de convergence (absolue ou non) de la série (1) situés sur F et D désigne l'ensemble des points de divergence. La structure de ces deux ensembles n'est pas encore connue et le théorème démontré plus haut permet d'éclaircir un certain détail de ce problème difficile.

---

[4] V. F. Hartogs: *Dissert.* München 1904, ou *Math. Ann.* t. 62, 1906. F. Leja: *Séries ent. doubles et multiples*, *Prace mat. fiz.* t. 33, 1925.

[5] L'équation (7) doit disparaître si $\varphi(R) = 0$ ou si $R = \infty$; au contraire, l'équation (6) doit disparaître si $\varphi(R) = \infty$. La fonction non negative $\varphi(t)$ est toujours non croissante et continue.

Remarquons que, dans le cas des séries entières simples dans lequel F représente une circonférence, les ensembles C et D peuvent contenir des points isolés dans l'ensemble F[6]. Or, le cas des séries entières doubles est différent. Je vais notamment prouver que:

$$\begin{array}{r}1^\circ.\ \textit{Les points de divergence de la série } (1)\\ \textit{situés sur la partie de } (F) \textit{ ne peuvent}\\ \textit{pas être isolés dans l'ensemble } (F).\end{array} \tag{8}$$

En effet, supposons que la série

$$\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}, \tag{1}$$

diverge au point $(x_0 y_0)$ situé sur la partie (8) de (F) et que ce point soit isolé par rapport à (F). Il existe donc un voisinage

$$|y - y_0| < \delta \tag{9}$$

tel que la série (1) converge en chaque point $(x_0 y_0)$, où $y \neq y_0$ appartient à ce voisinage. Or, chaque voisinage forme un ensemble d'unicité donc toutes les lignes $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ de la série (1) convergent, d'après notre théorème, au point x_0.

---

6) Le problème de la structure des ensembles C et D dans le cas des séries simples n'est pas encore élucidé complètement. On sait seulement que l'ensemble C doit être uu $F_{\sigma\delta}$ [v. W. Sierpiński: *Fundamenta Math*. t. II, 1921 p. 41].

Soit y' un point du voisinage (9) tel qu'on ait $|y'| > |y_0|$; la série (1) converge au point $(x_0 y')$ et ses lignes convergent au point x_0 donc, d'après un théorème de M. Hartogs[7)], la série (1) converge en chaque point $(x_0 y_0)$ où $|y < |y'|$ et, par suite, elle converge au point $(x_0 y_0)$ contrairement à l'hypothèse. La proposition est donc démontrée.

Cette propriété des points de divergence semble être surprenante parce que les points de convergence se comportent autrement. Je vais donner l'exemple suivant:

2°. *Exemple d'une série double ayant sur la partie* (8) *de* (F) *un point de convergence isolé dans l'ensemble* (F).

Soient

$$\sum a_\mu x^\mu, \quad \sum b_\nu y^\nu \tag{10}$$

deux séries simples dont le rayon de convergence est = 1. Supposons que la première d'elles diverge partout sur la circonférence $|x| = 1$ mais de sorte que les sommes partielles

$$s_\mu(x) = \sum_{i=0}^{\mu} a_i x^i, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

soient bornées au point $x = 1$ et non bornées en tous les autres points de la circonférence $|x| = 1$.[8)]

7) *Dissert.* p. 22.

8) L'existence d'une telle série résulte des recherches de M. Neder: *Dissert.* Gôttingen (1919).

La seconde des séries (10) peut être quelconque pourvu qu'elle s'annule au point $y = \frac{1}{2}$ sans s'annuler ailleurs.

Cela posé, considérons la série double suivante

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = a_0 b_0 + a_1 b_0 x + a_2 b_0 x^2 + \dots \\ + a_0 b_1 y + a_1 b_1 x y + a_2 b_1 x^2 y + \dots \\ + a_0 b_2 y^2 + a_1 b_2 x y^2 + a_2 b_2 x^2 y^2 + \dots \\ + \dots\dots\end{aligned}$$

où l'on a

$$a_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu.$$

Les sommes partielles de cette série ont la forme suivante

$$s_{\mu\nu}(xy) = \left(\sum_{i=0}^{\mu} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\nu} b_j y^j\right) \tag{11}$$

donc les équations (6) et (8) de la frontière (F) de notre série sont

$$|y| = 1, \quad 0 \leq |x| \leq 1 \tag{6}$$

$$|x| = 1, \quad 0 \leq |y| \leq 1, \tag{7}$$

d'où l'on voit que le point $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$ est situé sur la partie (7) de (F). Or, en vertu des hypothèses faites sur les séries (10), la suite double (11) converge au point $(1, \frac{1}{2})$ et diverge en tous les autres points de la partie (7) de (F), donc le point de convergence $(1, \frac{1}{2})$ est isolé dans (F).

Ajoutons qu'il est probable que la proposition 1° démontrée pour les points situés sur la partie (7) de (F) peut être étendue aux autres points de divergence situés sur (F), mais la démonstration de ce fait semble être beaucoup plus difficile.

Streszczenie. Celem tego referatu jest dowód podanego niżej twierdzenia i zastosowanie tego twierdzenia do pewnej własności brzegu obszaru bezwzględnej zbieżności szeregów potęgowych podwójnych.

Nazwijmy zbiorem jednoznaczności każdy zbiór (E) punktów płaszczyzny mający tę własność że, gdy dwa szeregi potęgowe pojedyńcze $\sum a_\nu x^\nu$ i $\sum b_\nu x^\nu$ są zbieżne w każdym punkcie zbioru (E), to szeregi te są identyczne.

Twierdzenie: *Jeśli szereg potęgowy podwójny*

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{1}$$

jest zbieżny w punktach (x_0, y), *gdzie* x_0 *jest stałe zaś* y *przebiega pewien zbiór jednoznaczności* (E), *to wszystkie wiersze* $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x_0^\mu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ *szeregu* (1) *są zbieżne.*

Brzeg (F) obszaru bezwzględnej zbieżności szeregu potęgowego (1) można, jak wiadomo, przedstawić dwoma równaniami postaci

$$|y| = \varphi(|x|), \quad \text{gdzie } 0 \leq |x| \leq R \tag{2}$$

$$|x| = R, \quad 0 \leq |y| < \varphi(R), \tag{3}$$

z których pierwsze przedstawia na płaszczyźnie dwóch zmiennych rzeczywistych $|x|$ i $|y|$ krzywą ciągłą i nierosnącą, drugie zaś przedstawia prostą, równoległą do osi $|y|$. Z pomocą poprzedniego twierdzenia można dowieść, że:

Punkty rozbieżności szeregu (1), *leżące na części* (3) *brzegu* (F) *nie mogą być izolowane w zbiorze punktów brzegu* (F).

Być może, że własność ta daje się rozszerzyć na punkty rozbieżności, leżące na części (2) brzegu (F), dowodu na to jednak podać nie umiem. Dodaję jeszcze, że punkty zbieżności szeregu (1) leżące na brzegu (F) nie posiadają powyższej własności; można łatwo podać przykład takiego szeregu (1), który jest zbieżny w jednym tylko punkcie, leżącym na brzegu (F), a rozbieżny we wszystkich innych punktach tego brzegu.

P. Sergescu (Cluj)

Sur les modules des zéros de l'équation du troisième degré

On connaît plusieurs théorèmes relatifs à la répartition des zéros de la dérivée d'un polynome dont on connaît les zéros.

M. Kakeya a démontré que si dans un cercle de rayon R il y a deux zéros d'un polynome de degré n, le cercle concentrique de rayon $R/\sin\frac{\pi}{n}$ contient au moins un zéro de la dérivée.

M. M. Biernacki a établi que: si dans un cercle de rayon R, il y a $(n-1)$ zéros d'un polynome de degré n, le cercle concentrique de rayon $R\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ contient $n-2$ zéros de la dérivée.

D'après M. Fekete: si A et B sont les affixes de deux zéros d'un polynome de degré n, il y a un zéro de la dérivée, au moins, à l'intérieur des segments de cercle d'où l'on voit AB sous l'angle $\frac{\pi}{n-1}$. (Dans le cas de l'équation du 3^{e} degré, ce domaine revient au cercle de diamètre AB).

Enfin, d'après MM. Grâce et Heywood, si A et B sont les affixes des zéros d'un polynome du n^{e} degré, le cercle de centre

$\frac{A+B}{2}$ et de rayon $\frac{AB}{2}$ cotg $\frac{\pi}{n}$ contient au moins un zéro de la dérivée. Citons encore les beaux travaux de MM. P. Montel et Walsh.

Les démonstrations de tous ces théorèmes exigent des connaissances qui dépassent le domaine de l'algèbre. Nous croyons que l'on peut trouver ces limitations par des voies élémentaires, en considérant succéssivement des polymones de degrés croissants.

Pour le second degré, il est évident que le zéro de la dérivée est au milieu du segment qui unit les affixes des deux zéros du polynôme.

Pour le troisième degré, on a le théorème suivant:

Théorème 1. *Soient O, A, B les affixes des trois zéros d'un polynome du troisième degré, où $OA < OB$. Il y a un zéro de la dérivée dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{OA}{\sqrt{3}}$ et un autre à l'extérieur du cercle de centre O et de rayon $\frac{OC}{\sqrt{3}}$. Les limites sont atteintes. De plus, le premier zéro de la dérivée est du même côté que A par rapport à la bissectrice de l'angle BOA; et le second zéro est du même côté que B par rapport à la même bissectrice.* (On sait que, d'après le théorème de Lucas-Gauss, tous les zéros de la dérivée se trouvent à l'intérieur du triangle OAB).

On s'assure aisément que ce théorème n'est pas contenu dans les théorèmes énoncés plus haut. (Au commencement de mes recherches, j'avais supprimé le facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ dans la première partie du théorème; M. Biernacki m'a attiré l'attention que dans ce cas on n'avait plus qu'une conséquence du théorème de M. Fekete).

La démonstration repose uniquement sur la représentation graphique des quantités imaginaires.

Supposons, pour simplifier l'écriture, que O est à l'origine. On a, entre les racines α et β, d'affixes A et B, de l'équation, et les racines m et k, d'affixes M et K, de la dérivée, les relations suivantes:

$$m + k = \frac{2}{3}(\alpha + \beta), \quad mk = \frac{1}{3}\alpha\beta$$

ou encore:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = 2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right), \quad \frac{1}{mk} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Posons, pour simplifier l'écriture: $\alpha = 1$, $\frac{1}{\beta} = \rho$, d'affixe R, avec $OR < 1$; $\frac{1}{m} = p$, $\frac{1}{k} = q$, d'affixes P et Q.

La relation $3mk = \alpha\beta$ entraîne

$$\arg m + \arg k = \arg\alpha + \arg\beta$$
$$\measuredangle MOA = \measuredangle BOK.$$

Les points M et K étant à l'intérieur du triangle OAB, (en vertu du théorème de Lucas–Gauss), il s'ensuit qu'ils sont séparés par la bissectrice de l'angle BOA. Pour fixer les idées, supposons que M est du même côté de cette bissectrice que le sommet A. Les points P et Q sont compris dans l'angle AOR et l'on a:

$$\measuredangle AOP = \measuredangle QOR < \measuredangle AOQ.$$

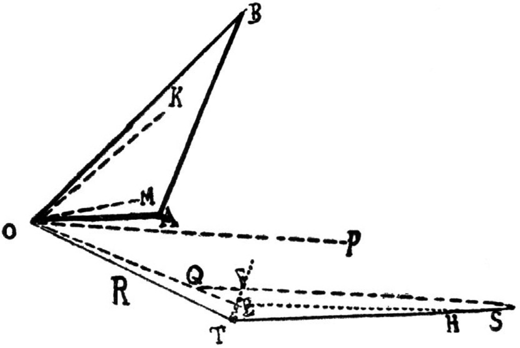
Je dis que, dans ces conditions, on a, nécéssairement:

$$OP > \sqrt{3}.$$

En effet, les relations (1) s'écrivent aussi:

$$(OP) + (OQ) = 2[(OA) + (OR)], \quad OP.OQ = 3OA.OR.$$

Soient: S le point $2(OR) + 2$ et T le point $2(OR)$. La première relation (2) donne $QS = ||OP$. Donc les angles QST et QOT sont égaux. Comme $OT = 2OR$ et $TS = 2$, il s'ensuit $OQ < QS$ (car $OR < 1$).



Menons la bissectrice de l'angle OTS, qui coupe OQ et QS respectivement en E et F. Par E, menons EH parallèle à FS. On a:

$$TH = OT = 2OR, \quad QE = QF.$$

Or, dans les triangles semblables THE et TFS, on a:

$$\frac{EH}{TH} = \frac{FS}{TS} = \frac{OE}{2OR} = \frac{FS}{2}$$

$$\frac{OQ + QE}{OR} = \frac{QS - QF}{1} = \sqrt{\frac{OP.OQ}{OR} + \frac{QE[OP - OQ - QE]}{OR}}$$

car $QE = QF$ et $QS = OP$. La seconde relation (2) donne $\frac{OP.OQ}{OR} = 3$. D autre part:

$$OP - OQ - OE = OP - EH = QS - EH \geq FS - EH \geq 0.$$

Donc:

$$\frac{OP - QE}{1} \geq \sqrt{3}, \quad OP \geq \sqrt{3}.$$

On tire immédiatement, de (2):

$$OQ \leq \sqrt{3}.OR.$$

Il s'ensuit:

$$OM \leq \frac{OA}{\sqrt{3}}, \quad OK \geq \frac{OB}{\sqrt{3}}$$

ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Les limites sont atteintes quand $OB = OA$. En effet, considérons l'équation $x^3 - e^{2i\theta}x = 0$, où $OA = OB = 1$. L'équation dérivée a les racines $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\theta}$, dont les modules sont bien $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Donc, en supposant O et A fixes et le point B mobile dans le plan, avec $OB \geq OA$, l'équation dérivée a toujours une racine à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon $\frac{OA}{\sqrt{3}}$ et une racine à l'extérieur de ce cercle. On a ainsi une séparation des racines de la dérivée.

Le fait d'avoir supposé M du même côté que A par rapport à la bissectrice de l'angle BOA, démontre la troisième partie de l'énoncé. Le théorème est donc complètement établi.

Remarque. Les relations entre les sommes $m + k$ et $\alpha + \beta$ montrent que MK passe par le centre de gravité du triangle OAB. Le fait appartient, d'ailleurs, au théorème de Lucas sur les points centraux (Bulletin de la Soc. mathématique de France. Tome XX pag. 10 et 17) car M et K sont des points centraux. Cf. à ce point de vue ma note: Sur les points centraux, dans le Bulletin de la Société des Sciences de Cluj Tome I, pag. 524.

Conséquences. Supposons $OA < AB < OB$. On peut appliquer le théorème 1 aux sommets O et A. Donc: l'affixe M d'un zéro de la dérivée se trouve à l'intérieur du polygone curviligne formé par les bissectrices des angles O et A, la droite OA, les cercles de rayon $\frac{OA}{\sqrt{3}}$ et de centres O et A. L'affixe K du second zéro de la dérivée est à l'extérieur du cercle de centre O et de rayon $\frac{OB}{\sqrt{3}}$

Si le point B vient sur l'axe réelle, on a une précision du théorème de Rolle: OAB étant les trois racines réelles d'une équation du troisième degré, avec $OA < AB < OB$, les deux zéros M et K de la dérivée se trouvent: 1) dans l'intervalle CD où $OC = OA(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $OD = \frac{OA}{\sqrt{3}}$ et 2) dans EB où $OE = \frac{OB}{\sqrt{3}}$.

Théorème 2. *Soient O, A, B, les affixes des trois zéros d'un polynôme du 3ᵉ dégré et M et K les affixes des zéros de la dérivée. Si $OB \geq OA\sqrt{3}$, on a une séparation analogue à celle du théorème de Rolle:*

$$OM \leq OA \leq OK \leq OB.$$

Mais, pour le cas où $OA < OB < OA\sqrt{3}$, il se peut que OM et OK soient plus petits que OA et donc l'analogie indiquée cesse.

En effet, d'après le théorème 1, on a $OM \leq \frac{OA}{\sqrt{3}}$ et $OK \geq \frac{OB}{\sqrt{3}}$.

Donc, si $OB > OA\sqrt{3}$, on a $OK > OA$ et $OM < OA$, c. f. d. q.

Pour le cas $OB < OA\sqrt{3}$, prenons comme exemple l'équation:

$$3x^3 + 2x^2 - 5x = 0$$

dont les racines sont $0, 1, -\frac{5}{3}$. $OB = \frac{5}{3}$, $OA = 1$. Donc $OB = 1{,}67$ $OA < OA\sqrt{3}$, mais très rapproché de cette valeur. La dérivée a les zéros -1 et $\frac{5}{9}$. Donc $OK = 1$ cesse d'être supérieur à OA. Dès que $OB < \frac{5}{3}$ et $OA = 1$, on a pour le cas particulier des racines réelles et de signe contraire $OK < OA$. On peut le vérifier immédiatement.

* * *

Applications du théorème 1. *Considérons la famille normale de polynômes de troisième degré:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$$

où $|f(x)| \leq M$ *pour* $|x| \leq R$. *Quel est le module minimum de la plus petite racine, différente de l'origine, de l'équation* $f(x) = a_0$?

Ce problème est analogue à la question que j'ai étudiée pour l'équation trinôme, dans les *C. R.* de l'Académie des Sciences de Paris, séance du 23 Novembre 1925, pag. 762.

Comme

$$|f(x) - a_0| < |f(x) + |a_0| \leq M + |a_0| = M'$$

on peut supposer, sans restreindre la généralité, $a_0 = 0$.

J'ai démontré dans une note antérieure des *C. R.* séance du 4 Août 1924, pag. 322, que, si $|f(x)|$ sont bornés dans le cercle $|x| \leq R$, alors $|f'(x)|$ sont bornés dans le cercle $|x| \leq \Theta R$ où $\Theta < 1$. Par conséquent, les dérivées forment une famille normale dans le cercle de rayon ΘR. Si $|f(x)| < M'$, on a dans le cercle de rayon R (loc. cit. pag. 323) :

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{R}{M'} \frac{M^2 - |f(\alpha)|^2}{R^2 - |\alpha|^2}$$

et donc, dans le cercle de rayon ΘR:

$$|f'(x)| < \frac{M'}{R(1 - \Theta^2)} = K.$$

Dans notre cas $f'(0) = a_1$. Alors le théorème de M. Landau (The Tohoku Mathematical Journal T. V, 1904, pag. 104) donne le module *minimum* (σ) des zéros de $f'(x)$

$$|\sigma| \geq \frac{|a_1|\Theta R}{K} = \frac{|a_1|R^2\Theta(1-\Theta^2)}{M'}.$$

Cela a lieu, quelle que soit $\Theta < 1$. Prenons donc pour Θ la valeur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ qui donne le *maximum* de $\Theta(1-\Theta^2)$. On a:

$$|\sigma| \geq \frac{2|a_1|R^2}{3\sqrt{3}M'}.$$

Mais, si $f(x)$ est un polynôme du troisième degré, le théorème 1 montre que:

$$\sigma \leq \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{\rho}{\sqrt{3}}$$

où A est le zéro de $f(x)$ le plus rapproché de l'origine et différent d'elle. Il s'ensuit:

$$\rho > \frac{2}{3}\frac{|a_1|R^2}{M'}$$

et, si l'on revient à $a_0 \neq 0$:

$$\rho > \frac{2}{3}\frac{|a_1|R^2}{M+|a_0|}$$

C'est la limitation cherchée au début de ce paragraphe.

Dans le cas où $a = 0$, on a une équation trinôme étudiée aux *C. R.* 23 Nov. 1925 pag. 763, pour $p = 1$, $n = 3$. La limite trouvée dans cette note donne:

$$\rho > \frac{|a_1|R^2}{M + |a_0|}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Elle est meilleure, pour ce cas particulier, que la limite générale, que nous donnons dans la présente note.

Si $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ les résultats de l'équation trinôme donnent:

$$\rho > \frac{4}{9}\frac{|a_2|R^3}{M + |a_0|}.$$

* * *

On peut étendre des considérations analogues pour le cas où $f(x)$ est un polynome du quatrième degré. Si O et A sont les affixes de deux zéros de $f(x)$, le théorème de Grâce Heywood exige qu'il y ait un zéro de la dérivée dans le cercle de diamètre OA. C'est à dire, si l'on désigne par O et q les plus petits modules des zéros de l'équation :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = a_0$$

et par σ le module minimum des zéros de la dérivée, sous la condition $|f(x)| \leq M$ pour $|x| \leq R$, on a:

$$\sigma < \rho$$

Mais nous avons montré que:

$$\sigma \geq \frac{2|a_1|R^2}{3\sqrt{3}(M+|a_0|)}.$$

Donc, on a finalement, dans ce cas:

$$\rho \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{a_1 R^2}{(M+|a_0|)}.$$

D. Menchoff (Moskwa)

Sur la représentation conforme des domaines plans

Supposons qu'il existe une correspondance biunivoque, bicontinue et directe[1)] entre les points de deux domaines D et Ω, situés respectivement dans les plans des variables complexes z et w. Soit $w = f(z)$ la fonction qui effectue cette correspondance. M. Harald Bohr a démontré le théorème suivant:

Lorsqu'en chaque point z du domaine D la limite

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$$

[1)] On dit qu'une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points de deux domaines plans D et Ω est directe, lorsque deux contours fermés simples quelconques, situés respectivement dans ces deux plans et formés de points qui se correspondent mutuellement, sont parcourus dans le même sens.

existe et possède une valeur finie non nulle, la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine D[2].

On peut donner une généralisation de ce théorème. Nous introduirons à cet effet la notation suivante:

Soit t un rayon rectiligne issu d'un point z et situé dans le plan du domaine D. Nous désignerons par

$$\lim_{h\to 0}(t)\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$$

la limite de

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$$

lorsque h tend vers zéro de façon que le point $z+h$ reste toujours sur le rayon t.

Le théorème de M. H. Bohr peut être généralisé de la façon suivante:

Théorème. *Les domaines D, Ω et la fonction $f(z)$ ayant la même signification que plus haut, supposons que chaque point z du domaine D, sauf peut-être un ensemble fini ou dênombrable, est l'extrémité de trois rayons rectilignes t_i, $i=1,2,3$, situés sur trois droites différentes et tels que les trois limites*

$$\lim_{h\to 0}(t_i)\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$$

---

[2] Harald Bohr, Mathematische Zeitschrift, t. 1, 1918, p. 403.

existent et possèdent la même valeur finie[3)].

Dans ces conditions la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine D.

Dans l'énoncé de ce théorème le nombre „trois" de rayons t_i est minimum, comme le montre l'exemple suivant:

$$f(z) = x + ye^{i\alpha}, \quad z = x + iy, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

3) Cette valeur peut être égale à zéro.

Mieczysław Biernacki (Paryż)

O pewnych uogólnieniach zasady zmiany argumentu Cauchy'ego

Według Cauchy'ego zmiana argumentu funkcji meromorficznej zmiennej zespolonej wzdłuż krzywej zamkniętej C jest równa różnicy między liczbą zer i biegunów funkcji zawartych wewnątrz krzywej C, pomnożonej przez 2π. Odpowiednie zastosowanie tej zasady pozwala często na określenie liczby minimalnej pierwiastków równań algebraicznych zawierających dowolny parametr a znajdujących się wewnątrz krzywej C.

W pewnych wypadkach zasada ta pozwoliła otrzymać najlepszą możliwą wartość owej liczby minimalnej.

Mieczysław Biernacki (Paryż)

O związkach pomiędzy zerami funkcji całkowitych rzędu skończonego i zerami ich pochodnych.

Według twierdzenia Laguerre'a, uzupełnionego przez Borela, gdy funkcja całkowita rzeczywista rodzaju skończonego p ma wszystkie zera rzeczywiste, pochodna jej może mieć conajwyżej p pierwiastków zespolonych. Gdy funkcja nie jest rzeczywista, twierdzenie to naogół już nie zachodzi, wszelako można dowieść, że pod pewnymi bardzo ogólnymi warunkami zera pochodnej zagęszczają się wyłącznie wzdłuż osi rzeczywistej. Można podać przykłady funkcji, dla których i ostatnio wymienione twierdzenie nie jest prawdziwem.

Feliks Burdecki (Wągrowiec)

Formuły Archimedesa na π

(Die Formeln des Archimedes für π)

Wenn wir die Seite des gleichseitigen dem Kreise einbeschriebenen m-Eckes durch a_m bezeichnen und den Radius des Kreises gleich 1 nehmen, so erhalten wir

$$a_{2m} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_m^2}} \tag{1}$$

Die Methode des Archimedes der Berechnung von π beruht, wie bekannt, auf der iterativen Anwendung der Formel (1). Wenn wir mit $f(x)$ die Iteration der „i"-ten Ordnung von $f(x)$ bezeichnen, erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n\to\infty} m.2^{n-1} f_n(a_m) \\ \text{wo} \quad f(x) &= \sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Im besonderen haben wir

$$\begin{aligned} \text{für } m = 4, \quad & \pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} f_n(\sqrt{2}) \\ \text{für } m = 6, \quad & \pi = 3 \lim_{n\to\infty} 2^{n} f_n(1) \\ \text{für } m = 10, \quad & \pi = 5 \lim_{n\to\infty} 2^{n} f_n\left(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}.$$

E. Żyliński (Lwów)

O postępach i zagadnieniach aksjomatyki algebry

Abstrakcyjne pojęcia grupy, pierścienia, pola, pola wymiernego, pola rzeczywistego itd. nastręczają cały szereg zagadnień, z których pewne dają się postawić dla każdej wogóle teorji aksjomatycznej, inne zaś posiadają charakter specjalny. Celem odczytu jest zwrócenie uwagi na kilka takich zagadnień, rozwiązanych lub jeszcze nierozwiązanych.

E. Żyliński (Lwów)

O pewnem twierdzeniu algebraicznej teorji liczb

Chodzi tu o nowe, w wielu wypadkach wygodne w zastosowaniu kryterjum pierwotności poszczególnej liczby w prostem algebraicznem rozszerzeniu pola wymiernego.

Stanisław Mazur (Lwów)

O ciałach algebraicznych nieskończonych

Twierdzenie 10. *Gdy $\bar{\alpha}$ oznacza daną liczbę porządkową, to istnieje ciało algebraiczne mocy $\aleph_{\bar{\alpha}}$.*

Twierdzenie 11. *Gdy $\bar{\alpha}$ oznacza daną liczbę porządkową, to zbiór wszystkich typów ciał algebraicznych mocy $\aleph_{\bar{\alpha}}$ jest mocy $2^{\aleph_0}$.*

Leon Lichtenstein (Lipsk): *O zastosowaniach metody Fouriera do równań różniczkowych typu hyperbolicznego*.

Ob. Journ. f. Math. 158, str. 80–91.

Władysław Nikliborc (Lwów): *O metodzie kolejnych przybliżeń*.

Treść referatu została opublikowana w pracy „Sur l'application de la méthode des approximations successives dans la théorie des équations différentielles". Studia math. I.

Łucjan Bottcker (Lwów): *Z teorji równań funkcyjnych*.

Feliks Burdecki (Wągrowiec): *Zagadnienia z teorji iteracji funkcyj*.

Juljusz Schauder (Lwów): *Rozwiązanie równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu typu eliptycznego (przy danych warunkach brzegowych) w otoczeniu całki szczególnej*.

Dział IV – Geometrja

Stanisław Garlicki (Warszawa)

O analogji asymptot hiperboli z płaszczyznami kołowemi stożków 2-go stopnia

1. Powszechnie znaną jest analogja własności ognisk stożkowej z własnościami prostych ogniskowych stożków 2-go stopnia. Analogja ta nie dziwi nikogo, gdyż tkwi ona już w samej definicji ogniska i prostej ogniskowej: ogniskiem stożkowej nazywamy punkt leżący w jej płaszczyźnie i mający tę własność, że każde dwie proste sprzężone przezeń przechodzące są wzajemnie prostopadłe; ogniskami są przeto punkty podwójne inwolucji, wyznaczonej na osi stożkowej przez pary prostych sprzężonych wzajemnie prostopadłych; – podobnież prostą ogniskową stożka 2-go stopnia nazywamy prostą wychodzącą z jego wierzchołka i mającą tę własność, że każde dwie płaszczyzny sprzężone przez nią przechodzące są wzajemnie prostopadłe; proste ogniskowe są to więc proste podwójne inwolucji, wyznaczonej na płaszczyźnie symetrji stożka przez pary płaszczyzn sprzężonych wzajemnie prostopadłych.

Otóż wiadomo, że istnieje dualistyczna korelacja pomiędzy własnościami prostych ogniskowych a własnościami płaszczyzn kołowych stożka 2-go stopnia. Jeżeli bowiem przekształcimy wiązkę prostokątnie-biegunowo t. j. każdej prostej podporządkujemy w tej wiązce płaszczyznę do niej prostopadłą, a każdej płaszczyźnie prostą do niej prostopadłą, to tworzące i płaszczyzny styczne stożka 2-go stopnia przekształcą się na płaszczyzny styczne i tworzące innego stożka 2-go stopnia o tym samym wierzchołku i tych samych osiach; każda zaś z prostych ogniskowych jednego stożka przekształci się na płaszczyznę kołową drugiego.

Zestawienie powyższych wywodów nasuwa następujące pytanie:

Skoro w układzie biegunowym wiązki istnieje korelacja własności płaszczyzn kołowych z własnościami prostych ogniskowych, – skoro te ostatnie własności są związane analogją z własnościami ognisk układu biegunowego płaskiego, – to czy istnieją w układzie biegunowym płaskim pewne proste o własnościach analogicznych z własnościami płaszczyzn kołowych w układzie biegunowym wiązki. Gdyby tak było, to między własnościami tych prostych a własnościami ognisk powinnaby w układzie biegunowym płaskim istnieć pewna korelacja analogiczna do korelacji między własnościami płaszczyzn kołowych a własnościami prostych ogniskowych układu biegunowego wiązki.

Proste takie rzeczywiście istnieją: są to asymptoty stożkowej; istnieje również pewna dualistyczna korelacja między własnościami asymptot hiperboli a własnościami ognisk stożkowej.

Analogję asymptot hiperboli z płaszczyznami kołowemi stożka 2-go stopnia zauważył Steiner[1)], oparłszy ją na następujących dwóch twierdzeniach:

1. Płaszczyzny kołowe stożka wraz z którąkolwiek jego płaszczyzną styczną wyznaczają na spółśrodkowej ze stożkiem kuli trójkąt sferyczny, którego pole jest stałe (Asymptoty hiperboli wraz z którąkolwiek jej styczną zamykają trójkąt, którego pole jest stałe).
2. Tworząca zetknięcia stożka z którąkolwiek jego płaszczyzną styczną jest dwusieczną kąta zawartego w tej płaszczyźnie między płaszczyznami kołowemi. (Punkt zetknięcia hiperboli z którąkolwiek jej styczną jest środkiem odcinka tej stycznej zawartego między asymptotami).

Na tej podstawie nie wahał się Steiner nazwać śladów płaszczyzn kołowych stożka na spółśrodkowej z nim kuli „sferycznemi asymptotami stożkowej sferycznej". Przeciwko tak śmiałemu zestawieniu tych pozornie różnych utworów możnaby podnieść liczne zastrzeżenia: asymptota jest wszak styczna do stożkowej, – płaszczyzna kołowa jest zewnętrzna względem stożka; stożkowa ma dwie asymptoty, które mogą być obie urojone, –

---

1) Crelle's Journal Bd II. Str. 45–63 (1827); Ges. Werke Bd I str. 116–117.

stożek ma sześć płaszczyzn kołowych, z których dwie są zawsze rzeczywiste.

Zastrzeżenia te ustaną wszakże, gdy sobie zdamy sprawę z tego, że stopień ogólności twierdzeń dotyczących stożka jest wyższy, niż twierdzeń dotyczących stożkowej, że, jak mówi Chasles, „geometrją płaska jest przypadkiem szczególnym geometrji sferycznej”[2]; analogji doskonałej między geometrją płaską a geometrją wiązki, tj. geometrji na kuli, możemy więc oczekiwać dopiero wtedy, gdy promień tej kuli stanie się nieskończony. Otóż jeżeli zrobimy takie założenie, to analogja asymptot hiperboli z płaszczyznami kołowemi stożka staje się doskonałą; jeżeli bowiem wierzchołek stożka oddala się do nieskończoności w kierunku tej jego osi, która jest przecięciem płaszczyzn kołowych, to stożek staje się walcem hiperbolicznym, a jego płaszczyzny kołowe płaszczyznami asymptotycznemi tego walca; w samej rzeczy, każde przecięcie walca hiperbolicznego płaszczyzną równoległą do jego płaszczyzny asymptotycznej jest stożkową złożoną z dwóch prostych, z których jedna jest niewłaściwą, – a więc jest zwyrodniałem kołem.

W przypadku, gdy wierzchołek stożka jest punktem właściwym, analogja asymptot hiperboli z płaszczyznami kołowemi stożka, podobnie zresztą jak analogja ognisk stożkowej z prostemi ogniskowemi stożka, musi być ułomną. Niemniej przeto ma ona dużą wartość, gdyż pozwala na mocy powszechnie

---

[2] Aperçu str. 240.

znanych własności hiperboli odgadywać znacznie trudniejsze do okazania własności stożków 2-go stopnia.

Oprócz twierdzeń wskazanych przez Steiner a w cytowane] rozprawie warto przypomnieć kilka znanych własności płaszczyzn kołowych stożka, rażąco analogicznych z odpowiedniemi własnościami hiperboli:

3. Iloczyn sinusów kątów dowolnej tworzącej stożka z jego płaszczyznami kołowemi jest stały (Iloczyn odległości dowolnego punktu hiperboli od jej asymptot jest stały).
4. Na każdej wychodzącej z wierzchołka stożka płaszczyźnie siecznej kąty zawarte między stożkiem a jego płaszczyznami kołowemi są równe (Na każdej siecznej hiperboli odcinki zawarte między hiperbolą a jej asymptotami są równe).
5. Rzut kąta dwóch stałych tworzących stożka z któregokolwiek punktu jego powierzchni na płaszczyznę kołową jest kątem stałej wielkości (Rzut stałej cięciwy hiperboli z któregokolwiek punktu hiperboli na jej asymptotę jest odcinkiem stałej długości).
6. Dwie którekolwiek płaszczyzny styczne do stożka wycinają na jego płaszczyznach kołowych kąty, które przez płaszczyznę łączącą tworzące zetknięcia są podzielone na połowy (Dwie którekolwiek styczne do hiperboli wycinają na jej asymptotach odcinki, które przez prostą łączącą punkty zetknięcia są podzielone na połowy).

Do tych twierdzeń łatwo byłoby dorzucić jeszcze kilka innych mniej znanych; szczególnie jednak ważnem wydaje mi się następujące:

7. Płaszczyzna styczna do stożka 2-g o stopnia przecina jego płaszczyzny kołowe według prostych, które wraz z prostemi ogniskowemi leżą na jednym stożku obrotowym; – płaszczyzny „wodzące” tworzącej zetknięcia są wraz z płaszczyznami kołowemi styczne do innego stożka obrotowego; oba stożki mają spólną oś obrotu, leżącą w zewnętrznej płaszczyźnie symetrji danego stożka (Styczna do hiperboli przecina jej asymptoty w punktach, które wraz z ogniskami leżą na jednem kole; – promienie wodzące punktu zetknięcia są wraz z asymptotami styczne do innego koła; – oba koła mają spólny środek leżący na osi zewnętrznej hiperboli).

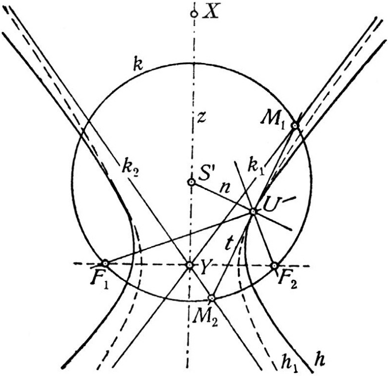
Twierdzenie to wyraża związek między płaszczyznami kołowemi i prostemi ogniskowemi stożka 2-go stopnia i pozwala wykreślnie wyznaczyć jedne, gdy dane są drugie, jeżeli tylko dana jest nadto jakakolwiek tworząca stożka, albo jakakolwiek jej płaszczyzna styczna. Steiner wspomina o tem twierdzeniu, ale tylko w przypadku, gdy płaszczyzna jest styczna do stożka wzdłuż tworzącej największego rozwarcia, – dlatego też sądzę, że nie będzie zbytecznem podanie ogólnego dowodu tego twierdzenia.

Zauważmy najpierw, że wystarcza okazać pierwszą część twierdzenia. Jeżeli bowiem zastosujemy ją do stożka prostokątnie biegunowego z danym, to przez przekształcenie prostokątnie biegunowe otrzymamy dla danego stożka część drugą.

Niechaj $\mathcal{H}_1$, i $\mathcal{H}_2$ będą płaszczyznami kołowemi stożka o wierzchołku S, f_1 i f_2 jego prostemi ogniskowemi; $\mathcal{C}$ jakąkolwiek jego płaszczyzną styczną; m_1 i m_2, prostemi przecięcia płaszczyzny $\mathcal{C}$ z płaszczyznami $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$, a prosta u niechaj będzie tworzącą zetknięcia płaszczyzny $\mathcal{C}$ z danym stożkiem. Na podstawie twierdzenia 2. tworząca u jest dwusieczną kąta $(m_1 m_2)$; przez tworzącą u poprowadźmy płaszczyznę $\mathcal{M}$ prostopadłą do $\mathcal{C}$, a więc normalną do danego stożka wzdłuż tworzącej u; wyznaczmy wreszcie prostą przecięcia s płaszczyzny $\mathcal{M}$ z zewnętrzną płaszczyzną symetrji $\mathcal{Z}$. Jeżeli prostą m_1 obracać będziemy dokoła prostej s, to utworzony przez ten obrót stożek przejdzie oczywiście przez prostą m_2; mamy okazać, że przejdzie on także przez obie proste ogniskowe f_1 i f_2.

Na prostej s obierzmy sobie jakikolwiek punkt S' i poprowadźmy przezeń płaszczyznę $\mathcal{P}$ prostopadłą do tej prostej; płaszczyznę tę obierzmy za płaszczyznę rysunku (Rys. 1). Ślad z płaszczyzny $\mathcal{Z}$ przechodzi oczywiście przez punkt S' i ślady X i Y osi zewnętrznych x i y jest to oś symetrji figury, złożonej ze śladu h danego stożka, śladów k_1 i k_2 jego płaszczyzn kołowych $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ i śladów F_1 i F_2 jego prostych ogniskowych f_1 i f_2. – Ponieważ płaszczyzna normalna $\mathcal{M}$ jest prostopadła do płaszczyzny rysunku (gdyż przechodzi przez prostą s do niej prostopadłą), więc 1° ślad n płaszczyzny $\mathcal{M}$ jest prostopadły do śladu t płaszczyzny stycznej $\mathcal{C}$ i dzieli na połowy odcinek $M_1 M_2$ zawarty między śladami prostych m_1 i $m_2$2, gdyż prosta u, dwusieczna kąta $(m_1 m_2)$, jest prostopadła do prostej t; 2° ślad n płaszczyzny $\mathcal{M}$, a więc i prostopadły do niego ślad t

płaszczyzny $\mathcal{C}$ jest dwusieczną kąta F_1UF_2, gdyż płaszczyzna $\mathcal{M}$, jako normalna, dzieli kąt dwuścienny F_1uF_2 na połowy. Z tych dwóch własności prostej n wynika, że hiperbola h_1 wyznaczona przez asymptoty k_1, k_2 i ogniska F_1, F_2, jest styczna do prostej t w punkcie U; że zatem koło k o środku S', przechodzące przez punkty M_1, przechodzi również przez punkty F_1, F_2; otóż koło k jest śladem stożka obrotowego przechodzącego przez proste m_1, m_2, f_1 i f_2, – co dowodzi twierdzenia.



Rys. 1.

2. Analogja między asymptotami hiperboli a płaszczyznami kołowemi stożka 2-go stopnia prowadzi do analogji między stożkowemi mającemi spólne asymptoty a stożkami mającemi spólny wierzchołek (spółśrodkowemi) i spólne płaszczyzny kołowe (spółkołowemi). Analogja ta pozostanie w mocy nawet wtedy, gdy spólne asymptoty stożkowych są urojone, t. j. gdy stożkowe są spółśrodkowemi je- dnokładnemi elipsami. (Dla krótkości nazywać będziemy „spółśrodkowemi jednokładnemi” każde dwie stożkowe o spólnych asymptotach rzeczywistych lub urojonych, a więc także dwie hiperbole przegrodzone przez spólne asymptoty, albo dwie hiperbole, z których jedna jest zwyrodniałą i składa się z asymptot drugiej).

Analogja stożkowych spółśrodkowych jednokładnych ze stożkami spółśrodkowemi spółkołowemi wyraża się przedewszystkiem w znanem twierdzeniu (wynikającem zresztą bezpośrednio z twierdzeń 2. i 4.):

8. Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek pęku stożków spółkołowych przecina te stożki według kątów, które mają spólne dwusieczne; są to proste zetknięcia owej płaszczyzny z temi stożkami pęku, które przez nie przechodzą. (Prosta leżąca w płaszczyźnie pęku stożkowych spółśrodkowych jednokładnych wyznacza w tych stożkowych cięciwy, które mają spólny środek; jest to punkt zetknięcia owej prostej z tą stożkową pęku, która przezeń przechodzi).

Rzecz ciekawa, że elementarna definicja dwóch stożkowych spółśrodkowych jednokładnych, która ma zastosowanie w przypadku, gdy jedna z dwóch stożkowych leży wewnątrz drugiej, jest własnością, którą przez analogję można przenieść na stożki spółśrodkowe spółkołowe w przypadku analogicznym, t. j. gdy jeden z dwóch stożków leży wewnątrz drugiego:

9. Jeżeli dwa stożki drugiego stopnia mają spólny wierzchołek i spólne płaszczyzny kołowe, ale nie mają spólnych rzeczywistych płaszczyzn stycznych (tak, że jeden z nich leży wewnątrz drugiego), to każda płaszczyzna sieczna, przechodząca przez którąkolwiek z trzech spólnych osi tych stożków, przecina je według tworzących, których kąty z tą osią zawarte mają stały stosunek sinusów. (Dwie spółśrodkowe stożkowe nazywamy jednokładnemi, jeżeli każda sieczna, przechodząca przez ich spólny środek, przecina je w punktach, których odległości od niego są w stałym stosunku).

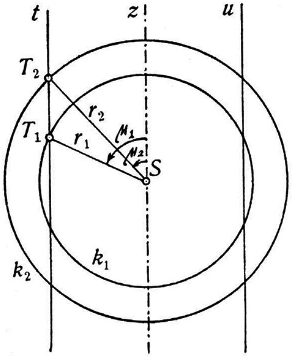
Z punktu S obranego na prostej przecięcia y dwóch płaszczyzn $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ opiszmy kulę o dowolnym promieniu r i przez dwa koła wycięte na tych płaszczyznach poprowadźmy którykolwiek z dwóch walców przez te koła wyznaczonych; będzie to walec eliptyczny, którego osią jest prostopadła z wystawiona w punkcie S do jednej z dwóch płaszczyzn dwusiecznych dwuścianu $(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)$. Opiszmy z punktu S jeszcze dwie inne kule o promieniach r_1 i r_2, obu większych, albo obu mniejszych od r, w tym ostatnim przypadku większych jednak od małej półosi prostokątnego przecięcia walca. Każda z tych dwóch kul przecina walec według stożkowej sferycznej, która z punktem S jako wierzchołkiem wyznacza stożek 2-go stopnia; powiadam, że płaszczyzny $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ są płaszczyznami kołowemi każdego z tych stożków. W samej rzeczy, jeżeli którykolwiek z tych stożków wraz z walcem i odpowiednią kulą przetniemy płaszczyzną równoległą do $\mathcal{H}_1$ lub do $\mathcal{H}_2$, to otrzymamy w płaszczyźnie siecznej trzy stożkowe należące do jednego pęku; ponieważ dwie z nich: przecięcie walca i przecięcie kuli, są kołami, więc i trzecia stożkowa musi być kołem. Jeżeli r_1 i r_2 są oba większe od r, to oś z walca jest osią wewnętrzną obu stożków, jeżeli r_1 i r_2 są oba mniejsze od r (ale większe od małej półosi prostokątnego przecięcia walca), to z jest osią zewnętrzną podrzędną obu stożków; prosta y, przecięcie płaszczyzn kołowych $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ jest w każdym przypadku osią zewnętrzną główną obu stożków.

Przez oś z poprowadźmy jakąkolwiek płaszczyznę $\mathcal{M}$ przecinającą oba stożki; tworzące stożków leżące w płaszczyźnie $\mathcal{M}$ otrzymamy łącząc wierzchołek S z punktami T_1 i T_2 (Rys. 2), według których jedna z leżących w tej płaszczyźnie tworzących walca, nap. t przecina koła k_1 i k_2 należące do kul o promieniach r_1 i r_2. Otóż sinusy kątów μ_1 i μ_2, które oś z czyni z tworzącemi ST_1 i ST_2, są oczywiście odwrotnie proporcjonalne do promieni r_1 i r_2, a więc stosunek tych sinusów $\frac{\sin\mu_1}{\sin\mu_2}$ ma wartość stałą $\frac{r_2}{r_1}$.

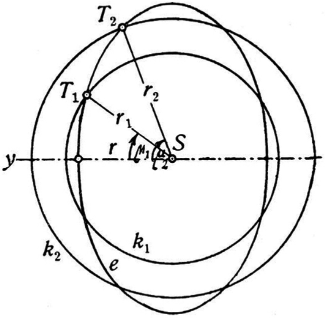
Pozostaje rozważyć przypadek, gdy płaszczyzna sieczna $\mathcal{M}$ przechodzi przez oś główną zewnętrzną obu stożków, tj. przez prostą przecięcia y płaszczyzn $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$; możemy przytem założyć, że $r_2 > r_1 > r$.

Przecięcie walca taką płaszczyzną jest oczywiście elipsą o małej osi r, a wielkiej osi r_2 (Rys. 3); przecięcie elipsy l ze spółśrodkowemi z nią kołami k_1 i k_2 o promieniach r_1 i r_2 wyznacza tworzące ST_1 i ST_2: których kąty z osią y, jak łatwo się przekonać, mają również stały stosunek sinusów:

$$\frac{\sin\mu_1}{\sin\mu_2} = \frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{r_1^2 - r^2}{r_2^2 - r^2}}.$$



Rys. 2.



Rys. 3.

Tutaj odbiegnę nieco od tematu, aby sformułować twierdzenie wzajemne, dotyczące stożków spółogniskowych:

9a. Płaszczyzny styczne do dwóch nieprzecinających się stożków spółogniskowych, wychodzące z dowolnego punktu którejkolwiek ich spólnej płaszczyzny symetrji, są do tej płaszczyzny nachylone pod kątami, których sinusy są w stałym stosunku (Styczne do dwóch nieprzecinających się spółogniskowych stożkowych, wychodzące z dowolnego punktu którejkolwiek ich spólnej osi, są do tej osi nachylone pod kątami, których sinusy są w stałym stosunku).

Z twierdzenia tego wynika bowiem ciekawy wniosek. Jeżeli przez tworzące zetknięcia płaszczyzn stycznych do obu spółogniskowych stożków poprowadzimy płaszczyzny normalne, to wszystkie te 4 płaszczyzny przejdą przez jedną prostą, leżącą w tej samej płaszczyźnie symetrji, co punkt, z którego wyprowadzono płaszczyzny styczne; będzie to mianowicie prosta, która wraz z tym punktem przegradza harmonicznie rzeczywiste lub urojone proste ogniskowe w tej płaszczyźnie symetrji położone. Powstają w ten sposób po każdej stronie obranej płaszczyzny symetrji dwa trójściany prostokątne o dwóch wspólnych krawędziach w tej płaszczyźnie leżących, a zatem o spólnym kącie płaskim γ, leżącym naprzeciw dwuściennych kątów prostych tych trójścianów; trzecie krawędzie trójścianów są to tworzące zetknięcia płaszczyzn stycznych. Oznaczmy α i α_1 kąty płaskie tych trójścianów leżące w płaszczyznach normalnych; α' i α_1' kąty dwuścienne przeciwległe, t. j. kąty płaszczyzn stycznych z ową płaszczyzną symetrji, wówczas

$$\sin\alpha = \sin\alpha' \sin\gamma, \qquad \sin\alpha_1 = \sin\alpha_1' \sin\gamma,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha_1'} = \text{stałej},$$

skąd wynika:

9b. Odcinki normalne, spuszczone na dwa nieprzecinające się stożki spółogniskowe z dowolnego punktu którejkolwiek ich płaszczyzny symetrji (ale nie leżące w tej płaszczyźnie) są w stałym stosunku (Odcinki normalne, spuszczone na dwie nieprzecinające się stożkowe spółogniskowe z dowolnego punktu którejkolwiek ich osi (ale nie leżące na tej osi), są w stałym stosunku).

W rozprawie p. t. „Ueber algebraische Kurven und Flächen" dowodzi Steiner następujących twierdzeń o stożkowych spółśrodkowych jednokładnych[3]:

(10). Spodki normalnych, spuszczonych z dowolnego punktu P na stożkowe spółśrodkowe jednokładne, leżą wszystkie na hiperboli przechodzącej przez ten punkt, przez spolny środek wszystkich tych stożkowych i przez punkty niewłaściwe ich spólnych osi. – Nawzajem:

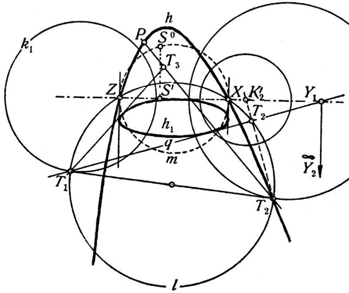
(11). Każda hiperbola przechodząca przez spolny środek stożkowych spółśrodkowych jednokładnych i mająca asymptoty równoległe do ich spólnych osi, przecina te stożkowe w punktach, dla których normalne przechodzą wszystkie przez jeden punkt P, który leży na tej hiperboli.

Ta t. zw. „hiperbola Steinera" rozwiązuje, jak wiadomo, zagadnienie normalnych dla poszczególnych stożkowych pęku i jest źródłem licznych wykreśleń środka krzywizny dla dowolnego punktu stożkowej. Zamierzam okazać dwa twierdzenia analogiczne, dotyczące pęku stożków spółkołowych i prowadzą-

---

[3] Crelle's Journal Bd XLIX S. 355 (1854); Ges. Werke Bd II S. 628.

ce do rozwiązania analogicznych zagadnień dla poszczególnych stożków pęku.



Rys. 4.

10. Jeżeli przez prostą *p*, wychodzącą z wierzchołka pęku stożków spółkołowych, poprowadzimy do poszczególnych stożków płaszczyzny normalne, to tworzące wzdłuż których te płaszczyzny są normalne, leżą wraz z osiami pęku i prostą p na jednym stożku 2-go stopnia. – Nawzajem:
11. Każdy stożek 2-go stopnia, przechodzący przez trzy osie pęku stożków spółkołowych, przecina te stożki według takich tworzących, że płasczyzny normalne wzdłuż nich do poszczególnych stożków poprowadzone przechodzą wszystkie przez tę samą prostą *p* stożka przechodzącego przez osie.

Wystarczy dowieść twierdzenie 10., jeżeli bowiem jest ono prawdziwe, to twierdzenie 11., jako odwrotne, łatwo z niego wynika.

Za płaszczyznę rysunku (Rys. 4) obieramy jakąkolwiek płaszczyznę równoległą do jednej z płaszczyzn kołowych pęku, nap. do $\mathcal{H}_1$. Z trzech osi pęku x, y, z jedna, $y \equiv \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$, jest oczywiście równoległa do płaszczyzny rysunku; dwie inne z i x niechaj przebijają płaszczyznę rysunku w punktach Z i X; na odcinku ZX dany jest nadto rzut prostokątny S' wierzchołka S pęku; dany jest wreszcie gdziekolwiek na płaszczyźnie rysunku punkt P – ślad danej prostej $p \equiv SP$. Punkt S' wraz z punktami Z i X wyznacza wierzchołek S; – jeżeli bowiem na odcinku ZX jako na średnicy opiszemy koło m, to prostopadła wystawiona do ZX w punkcie S' przecina koło m w punkcie S^0, który jest kładem wierzchołka S dokoła prostej ZX.

Przecięcie pęku stożków spółkołowych płaszczyzną rysunku, która jest równoległa do płaszczyzny kołowej $\mathcal{H}_1$, jest pękiem kół (k), oczywiście eliptycznym; pęk ten jest wyznaczony przez punkty Z i X, które są jego kołami zerowemi. Aby otrzymać poszczególne koła pęku (k), t. j. ślady poszczególnych spółkołowych stożków, należy z dowolnego punktu prostej ZX zakreślić koło o promieniu średnim proporcjonalnym między odległościami tego punktu od Z i X; gdy punkt obrany leży zewnątrz odcinka ZX, będzie to koło prostokątne przecinające koło m (lub jakiekolwiek inne koło przechodzące przez punkty Z i X); jeżeli punkt obrany leży między punktami Z i X, będzie to koło urojone, którego rzeczywistem odwzorowaniem jest koło średnicowo przecięte przez koło m (takiem jest nap. koło zakreślone z punktu S' promieniem $S'S^0$).

Aby wyznaczyć ślad płaszczyzny normalnej poprowadzonej przez prostą SP do któregokolwiek stożka pęku, postąpimy jak następuje: przez wierzchołek S poprowadźmy płaszczyznę $\mathcal{Q}$ prostopadłą do prostej SP; przez dowolny punkt T_1 śladu q tej płaszczyzny i przez punkty Z i X poprowadźmy koło l; wyznaczmy na niem punkt T_2 średnicowo przeciwległy punktowi T_1; przez punkt T_2 poprowadźmy koło k_2 przecinające prostokątnie koło l i mające środek na prostej ZX; będzie to oczywiście koło należące do pęku (k) i styczne w punkcie T_2 do prostej T_1T_2; powiadam, że płaszczyzna normalna do stożka Sk_2 wzdłuż tworzącej ST_2 przechodzi przez prostą SP. W samej rzeczy, płaszczyzna taka musi łączyć tworzącą ST_2 z prostą ST_3 prostopadłą do płaszczyzny stycznej ST_1T_2. Otóż trójścian $S(T_1T_2T_3)$ jest trójprostokątny: krawędź ST_3 jest prostopadła do krawędzi ST_1 i ST_2, te zaś są wzajemnie prostopadłe, gdyż odcinek T_1T_2 jest średnicą kuli przechodzącej przez punkt S. Prosta ST_2 jest więc prostopadłą do płaszczyzny ST_3T_1, tak że proste SP, ST_2 i ST_3 są odpowiednio prostopadłe do płaszczyzn $\mathcal{Q}$, ST_3T_1 i ST_1T_2; ponieważ te płaszczyzny przechodzą przez jedną prostą ST_1, więc tamte proste leżą w jednej płaszczyźnie; innemi słowy, płaszczyzna normalna ST_2T_3 przechodzi przez prostą SP.

Otóż, gdy punkt T_1 opisuje prostą q, punkt T_2 opisuje pewną stożkową h. W samej rzeczy, pęk $Z(T_1)$, który powłóczy prostą ZT_1 dokoła punktu Z, jest równy pękowi $Z(T_2)$, a perspektywiczny z pękiem $X(T_1)$, ten zaś jest równy pękowi $X(T_2)$, tak że pęki $Z(T_2)$ i $X(T_2)$ są rzutowe. Stożkowa h przez te dwa pęki wyznaczona przechodzi oczywiście przez wierzchołki pęków Z i X, t. j. przez ślady osi z i x; łatwo się przekonać, że przechodzi ona również przez niewłaściwy ślad Y_2 trzeciej osi y (wystarcza w tym celu przenieść punkt T_1 do przecięcia Y_1 prostych ZX i q) i przez punkt P (wystarczy rozważać ten stożek pęku, który przechodzi przez prostą SP). Ale stąd wynika, że stożek Sh przechodzi przez wszystkie proste ST_2, przez trzy osie pęku x, y, z i przez prostą SP, c. b. d. o.

Zauważmy, że biegunowe punktu T_1 względem wszystkich kół pęku (k) przechodzą przez punkt T_2, gdyż przez ten punkt przechodzą biegunowe punktu T_1 względem dwóch kół tego pęku: względem koła k_1 przechodzącego przez punkt k_1 i względem koła k_2 przechodzącego przez punkt T_2. Stąd wynika, że prosta ST_2 jest przecięciem płaszczyzny biegunowej prostej ST_1 względem któregokolwiek stożka pęku z płaszczyzną SPT_2 prostopadłą do prostej STt_1. Gdy więc mamy jeden którykolwiek stożek pęku, nap. Sk_1 i płaszczyznę Q, to obracając prostą ST_1 w płaszczyźnie Q dokoła punktu S, znajdziemy dowolną liczbę tworzących ST_2 stożka Sh. – Jeżeli zamiast płaszczyzny Q poprowadzimy przez punkt S inną płaszczyznę Q', to otrzymamy inny stożek Sh' przechodzący przez te same trzy osie x, y, z; przecięcie stożków Sh i Sh' wyznaczy więc osie stożka Sk_1; są to właśnie te same stożki, któremi zazwyczaj posługujemy się do tego celu[4].

Tworząca ST_2 stożka Sh ma inną jeszcze własność: jest to

---

[4] Patrz nap. podręczniki Greometrji wykreślnej Ch. W i en er a (t. II,

prosta biegunowa płaszczyzny $\mathcal{Q}$ względem jednego ze stożków spółkołowych. W samej rzeczy, prostopadła spuszczona z punktu na prostą q przecina prostą ZX w pewnym punkcie K_2' w kole należącem do pęku (k), mającem ten punkt za środek, prosta q będzie biegunową punktu T_2, gdyż jest ona prostopadła do prostej$K_2' T_2$ w takim punkcie $T`_2$ (leżącym na kole l), że $K_2' T_2 . K_2' T_2' = K_2' Z . K_2' X$.

Twierdzenie 10. wyraża związek między pękiem stożków spółkołowych a jakąkolwiek prostą p wychodzącą z jego wierzchołka; przy sposobności dowodu tego twierdzenia poznaliśmy jednak również związek między tym pękiem stożków a jakąkolwiek płaszczyzną $\mathcal{Q}$ przechodzącą przez jego wierzchołek:

12. Jeżeli pęk stożków spółkołowych przetniemy jakąkolwiek płaszczyzną $\mathcal{Q}$ przechodzącą przez jego wierzchołek, i do każdego z przeciętych stożków wzdłuż tworzących jego przecięcia tą płaszczyzną poprowadzimy płaszczyzny styczne, to prostopadłe, poprowadzone w tych płaszczyznach do owych tworzących, oraz proste biegunowe płaszczyzny $\mathcal{Q}$ względem wszystkich stożków pęku, leżą wszystkie na stożku 2-go stopnia, przechodzącym przez trzy osie pęku (Bieguny prostej jakiejkolwiek q względem stożkowych spółśrodkowych jednokładnych leżą na hiperboli, przechodzącej przez spólny środek tych stożkowych i mającej asymptoty równoległe do ich spólnych osi).

---

str. 18 ff), K. Rohna i Papperitza (t. III str. 164 ff), W. Fiedlera (t. II, str. 327 ff).

Z twierdzenia tego wynika ciekawy wniosek. Do każdej tworzącej ST_2 stożka Sh poprowadźmy przez wierzchołek S płaszczyznę prostopadłą ST_2T_1; płaszczyzna ta przejdzie przez prostą ST_1 i będzie prostopadła do płaszczyzny ST_1T_2; będzie to więc płaszczyzna normalna do stożka Sk_1 wzdłuż tworzącej ST_1. Gdy prosta ST_2 opisuje stożek 2-go stopnia Sh przechodzący przez proste x, y, z i SP, płaszczyzna normalna ST_3T_1 powłóczy stożek prostokątnie biegunowy Sh_1 styczny do płaszczyzn, które są do tamtych prostych prostopadłe. – a więc do yz, zx, xy i Q:

13. Jeżeli pęk stożków spółkołowych przetniemy jakąkolwiek płaszczyzną Q przechodzącą przez jego wierzchołek, to płaszczyzny normalne do przeciętych stożków wzdłuż tworzących przecięcia ich tą płaszczyzną powłóczą stożek 2-go stopnia styczny do trzech płaszczyzn symetrji pęku i do płaszczyzny Q.

Analogiczne twierdzenie dla stożkowych spółśrodkowych jednokładnych brzmi:

(Jeżeli pęk stożkowych spółśrodkowych jednokładnych przetniemy jakąkolwiek prostą, to normalne do przeciętych stożkowych w punktach ich przecięcia tą prostą powłóczą parabolę styczną do obu osi pęku i do danej prostej).

Parabola ta nie jest bynajmniej identyczną z t. zw. parabolą Steinera[5)], choć równie dobrze nadaje się do rozwiązania za-

---

5) Ges. Werke, Bd II, S. 629.

gadnienia normalnych do stożkowej i do wyznaczania środka krzywizny w dowolnym punkcie danej stożkowej.

Przez przekształcenie prostokątnie-biegunowe twierdzeń 12. i 13. otrzymamy następujące dwa twierdzenia dotyczące stożków spółogniskowych:

14. Jeżeli przez prostą p wychodzącą z wierzchołka stożków spółogniskowych poprowadzimy do nich płaszczyzny styczne, to płaszczyzny normalne do tych stożków poprowadzone wzdłuż tworzących zetknięcia oraz płaszczyzny biegunowe prostej p względem wszystkich tych stożków, powłóczą stożek 2-go stopnia styczny do trzech spólnych płaszczyzn symetrji tych stożków (Jeżeli z punktu P leżącego w płaszczyźnie stożkowych spółogniskowych poprowadzimy do nich styczne, to normalne w punktach zetknięcia oraz biegunowe punktu P względem wszystkich tych stożkowych powłóczą parabolę styczną do spólnych osi tych stożkowych).
15. Jeżeli przez prostą p wychodzącą z wierzchołka stożków spółogniskowych poprowadzimy do nich płaszczyzny styczne i w każdej z tych płaszczyzn do tworzącej zetknięcia poprowadzimy prostą prostopadłą, to wszystkie te prostopadłe leżą na stożku 2-go stopnia przechodzącym przez spólne osie tych stożków i przez prostą p.

Warszawa, wrzesień 1927

Ludomir Wolfke (Warszawa)

Podstawy geometrji wykreślnej

W referacie niniejszym miałem zamiar podać szereg spostrzeżeń, dotyczących tej *podstawowej metody*, *odwzorowania*, jaką stanowi *metoda rzutu środkowego*. Licząc się jednak z brakiem czasu i nie chcąc absorbować uwagi Sz. Panów zagadnieniami drugorzędnemi – posiadającemi wyłącznie charakter dydaktyczny – zmuszony jestem ograniczyć treść mego przemówienia do rzeczy najistotniejszych.

Nie będę przytaczać znanych argumentów, uzasadniających wyjątkowe znaczenie teorji rzutu środkowego i określających stosunek Geometrji rzutowej do Geometrji wykreślnej, gdyż sprawa ta została już dawno należycie oświetlona przez znanego reformatora Geometrji wykreślnej: Wilhelma Fiedlera. Wiemy również wszyscy o owocnej działalności prof. dr. Mieczysława Łazarskiego, który przez szereg lat reprezentował analogiczny kierunek na politechnice lwowskiej.

W obecnej chwili jednak, z łatwością stwierdzić możemy, że teoretyczne przeświadczenie o doniosłości metody rzutu środkowego uległo znacznemu osłabieniu. Jestem skłonny przypuszczać, że jedną z głównych przyczyn powyższego faktu są pewne trudności metodyczne w racjonalnem ustosunkowaniu Geometrji rzutowej do Geometrji wykreślnej.

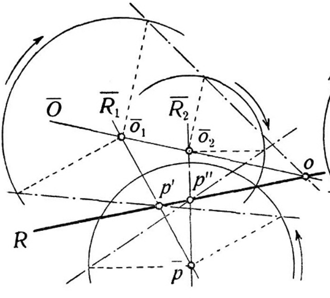
W systematycznym wykładzie Geometrji rzutowej, *teorja homologji* (*kolineacji perspektywicznej*) stanowi część ogólnej *teorji odpowiedniości jednokreślnych* (*homograficznych*). Urzeczywistnienie podobnego planu w wykładach Geometrji wykreślnej jest niewątpliwie połączone ze znacznemi trudnościami dydaktycznemi; sądzimy jednak, że *narracyjne traktowanie* teorji homologji – ujawniające zupełną rezygnację z należytego uzasadnienia tak podstawowych pojęć geometrycznych – jest rzeczą niedopuszczalną.

Jeżeli wykład Geometrji wykreślnej rozpoczynamy od ogólnej teorji rzutu środkowego, to szczegółowa *analiza zagadnienia o dwukrołnem odwzorowaniu perspektywicznem* elementów podstawowych: punktu, szeregu punktowego i układu płaskiego — stanowi *naturalną podstawę dla teorji odpowiedniości homologicznej*[1].

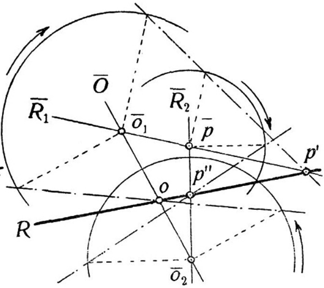
§ 1. Rzuty punktu. Posługujemy się pomocniczem *odwzorowaniem cyklograficznem* i zakładamy, że dane są trzy różne punkty o_1, o_2, p, przyczem dwa pierwsze nie leżą na płaszczyźnie rzutów Π i przyjęte są za środki rzutów, a trzeci jest dowolnym

[1] Por. L. Wolfke, *Wykłady Geometrji wykreślnej*, tom I: „*Zasady teorji perspektywy*", str. 67–110 (Warszawa, 1927).

punktem danym, podlegającym dwukrotnemu odwzorowaniu w rzucie środkowym (rys. 1 i 2).



Rys. 1.



Rys. 2.

Mamy wówczas trzy określone proste, a mianowicie: prostą O, łączącą punkty o_1 i o_2 – czyli *łącznicę środków rzutów* – oraz dwie proste R_1 i R_2 łączące odpowiednio punkty o_1 i o_2 z punktem p, czyli dwa *promienie rzucające*, poprowadzone przez punkt p.

Gdy wyłączona jest współlinjowość punktów o_1, o_2, p, to proste O, R_1, R_2 są trzema prostemi różnemi; określone jest wówczas położenie płaszczyzny ρ, przesuniętej przez punkty o_1, o_2, p.

Proste O, R_1, R_2 przebijają płaszczyznę rzutów w punktach o, p', p'', z których pierwszy jest *śladem łącznicy środków rzutów*, a dwa pozostałe stanowią, odpowiednio, *pierwszy i drugi rzut punktu p*.

W wypadku ogólnym istnieje określona prosta R: ślad płaszczyzny ρ; na takiej prostej leżą ślady trzech prostych: O, R_1, R_2, należących do płaszczyzny ρ.

Otrzymujemy ostatecznie następujące twierdzenia:

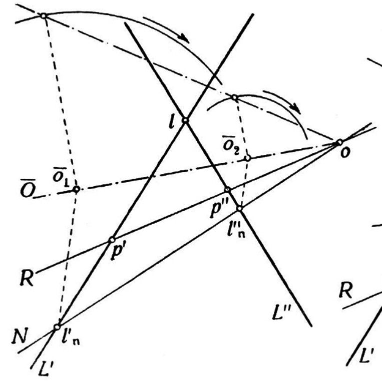
1. *Dwa rzuty dowolnego punktu, nie leżącego na łącznicy środków rzutów, są punktami współlinjowemi ze śladem łącznicy środków rzutów.*
2. *Oba rzuty punktu, leżącego na łącznicy środków rzutów, schodzą się ze śladem tej łącznicy.*
3. *Miejsce geometryczne tych punktów, z których każdy posiada rzuty zjednoczone, jest zbiorem punktowym, złożonym ze wszystkich punktów układu płaskiego i szeregu punktowego; podłożem układu jest płaszczyzna rzutów* Π, *a podłożem szeregu jest łącznica środków rzutów* O.

§ 2. Rzuty prostej, wichrowatej względem łącznicy środków. Gdy rozważamy prostą L, podlegającą dwukrotnemu odwzorowaniu perspektywicznemu, i zakładamy, że nie jest ona współpłaszczyznowa z łącznicą środków rzutów – z prostą O, to stwierdzamy, przedewszystkiem, istnienie dwóch różnych płaszczyzn rzucających: π_1 i π_2. Wyłączając wypadek przynależności prostej L do płaszczyzny rzutów Π, otrzymujemy następnie dwie nowe proste L' i L'': pierwszy i drugi rzut prostej L. Proste L, L', L'' nie leżą na jednej płaszczyźnie, są one wszakże prostemi współpunktowemi, gdyż każdy z rzutów prostej L przechodzi przez jej ślad l.

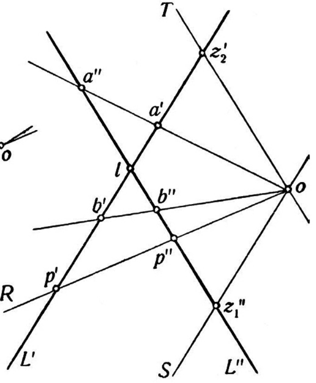
Zakładamy wreszcie, że prosta L nie jest prostą czołową; jej ślad i oba punkty zbiegu l'_n i l''_n są wtedy punktami właściwemi. Jeżeli dane jest wówczas odwzorowanie perspektywiczne prostej L, wyznaczone zapomocą środka rzutów o_1 (rys. 3), i poszukiwane jest nowe odwzorowanie prostej, to zagadnienie takie sprowadza się jedynie do wyznaczania nowego punktu zbiegu l''_n, na zasadzie jednokładności, określonej przez koła oddalenia środków rzutów; położenie śladu prostej jest, oczywiście, niezależne od położenia środka rzutów.

Gdy rozważamy proste L, L', L'', jako podłoża szeregów punktowych, to zapomocą dwóch pęków promieni rzucających mamy określone dwie zupełne i wzajemnie jednoznaczne odpowiedniości perspektywiczne pomiędzy szeregami punktowemi: L i L' oraz L i L''. Określona jest przeto w sposób pośredni pewna odpowiedniość zupełna i wzajemnie jednoznaczna pomiędzy szeregami L' i L''. Dwa rzuty każdego punktu, wziętego dowolnie na prostej L, podlegają przytem twierdzeniu ogólnemu, dotyczącemu współlinjowości ze śladem łącznicy środków rzutów. Tym sposobem otrzymujemy następujące twierdzenie:

4. *Jeżeli proste L, L', L'' są prostemi współpunktowemi, nie leżącemi na jednej płaszczyźnie, to z dwóch odpowiedniości perspektywicznych ustalonych pomiędzy szeregami punktowemi: L i L' oraz L i L'' – wynika perspektywiczna odpowiedniość szeregów L' i L'', przyczem środek wynikowej odpowiedniości perspektywicznej jest współlinjowy ze środkami dwóch odpowiedniości danych.*



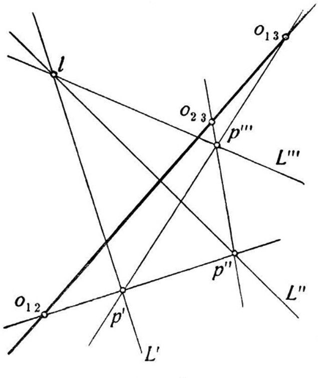
Rys. 3.



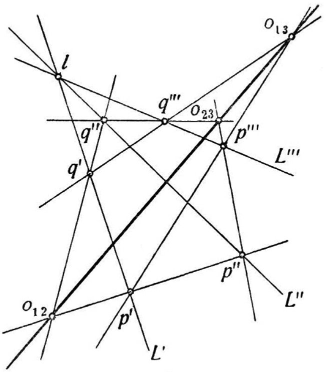
Rys. 4.

W pęku płaszczyzn, przesuniętych przez łącznicę środków; znajdujemy dwie szczególne płaszczyzny: σ i τ – równoległe, odpowiednio, do pierwszego i drugiego rzutu prostej L; ich punkty przecięcia z prostą daną są dwoma *punktami zniknienia*: z_1 i z_2, a pozostałe, właściwe rzuty takich punktów, czyli z_1'' i z_2' są dwoma *punktami wzajemnemi* wynikowej odpowiedniości perspektywicznej (rys. 4).

§ 3. Twierdzenia Desargues'a. Twierdzenie (4) o wynikowej odpowiedniości perspektywicznej szeregów punktowych może być również dowiedzione w tym wypadku, kiedy trzy podłoża L', L'', L''' są prostemi współpunktowemi i jednocześnie współpłaszczyznowemi (rys. 5). Zakładamy wówczas, że dane są dwa różne punkty o_{12} i o_{22} – jako wierzchołki pęków, określających odpowiedniości perspektywiczne szeregów punktowych: L' i L'' oraz L'' i L'''.Wprowadzając dowolną prostą pomocniczą L, współpunktową z podłożami rozważanych szeregów, lecz nie leżącą na ich płaszczyźnie, otrzymujemy trzy płaszczyzny różne: π_1, π_2, π_3, przesunięte, odpowiednio, przez trzy pary prostych L i L', L i L'', L i L'''.



Rys. 5.



Rys. 6.

Gdy wybierzemy dowolny punkt o_1, na płaszczyźnie π_1 i przyjmiemy go za wierzchołek pęku, określającego perspektywiczną odpowiedniość szeregów L i L', to podstawowe twierdzenie paragrafu poprzedniego możemy zastosować trzykrotnie, stwierdzając kolejno istnienie wynikowych odpowiedniości perspektywicznych dla następujących par szeregów punktowych:

$$L \text{ i } L'' \quad \text{(wierzchołek } o_2 \text{ na płaszczyźnie } \pi_2\text{)},$$
$$L \text{ i } L''' \quad \text{(wierzchołek } o_3 \text{ na płaszczyźnie } \pi_3\text{)},$$
$$L' \text{ i } L''' \quad \text{(wierzchołek } o_{13} \text{ na płaszczyźnie } \Pi\text{)},$$

Punkty o_1, o_2, o_3 są trzema punktami różnemi, gdyż leżą na trzech płaszczyznach różnych, przesuniętych przez prostą L, przyczem żaden z nich nie leży na prostej L.

Dwa dane punkty o_{12} i o_{22}, wraz z otrzymanym punktem o_{12} stanowią ślady boków trójkąta $o_1 o_2 o_3$, są więc punktami współlinjowemi.

W ten sposób otrzymujemy następujące twierdzenie:

5. *Jeżeli proste L', L'', L''' są prostemi współpunktowemi i* współpłaszczyznowemi, *to z dwóch odpowiedniości perspektywicznych, ustalonych pomiędzy szeregami: L' i L'' oraz L'' i L''' – wynika perspektywiczna odpowiedniość szeregów L' i L'', przyczem środek wynikowej odpowiedniości perspektywicznej jest współlinjowy ze środkami dwóch odpowiedniości danych.*

Opierając się na dowiedzionem twierdzeniu (5), znajdujemy punkt o_{13} na łącznicy punktów o_{12} i o_{23}, gdy wybieramy najprzód dowolny punkt p' na podłożu L' i wykreślamy odpowiedni promień pęku o_{13} po uprzedniem wyznaczeniu punktów p'' i p''' na podłożach L'' i L'''.

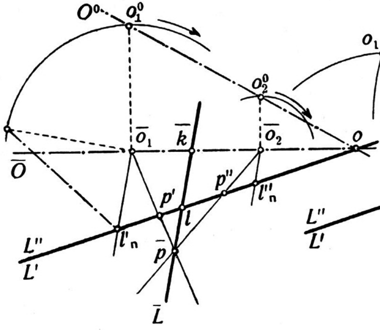
Jako wniosek z dowiedzionego twierdzenia (5), otrzymujemy twierdzenie Desargues'a, po wyznaczeniu nowej trójki punktów: q', q'', q''' (rys. 6).

Otrzymujemy następnie dowód odwrotnego twierdzenia Desargues'a, odpowiadającego poprzedniemu na zasadzie dwoistości układu płaskiego, gdy rozważamy dwa pomocnicze trójkąty $o_{12}p'q'$ i $o_{23}p'''q'''$.

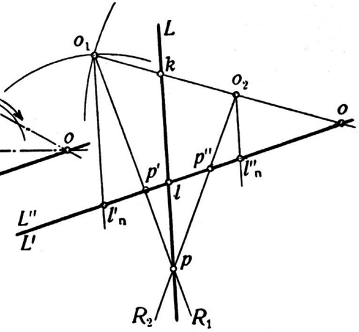
§ 4. Rzuty szeregu współpłaszczyznowego z łącznicą środków. Zmiana środka rzutów w perspektywicznem odwzorowaniu prostej, współpłaszczyznowej z łącznicą środków, stanowi punkt wyjścia dla teorji *homologji linjowej*. Na wspólnej płaszczyźnie rzucającej – rozważanej w odwzorowaniu pomocniczem (rys. 7), albo w kładzie (rys. 8) – znajdujemy łącznicę środków O, prostą L oraz wspólne podłoże (L', L'') dla obu rzutów szeregu punktowego L.

Stwierdzamy wówczas, że ślady prostych O i L są dwoma *punktami podwójnemi* wynikowej odpowiedniości szeregów L' i L'', przyczem stała jest wartość dwustosunku czwórki punktowej $olp'p''$ złożonej z punktów podwójnych i z dowolnej pary punktów odpowiednich. Dwustosunek taki, noszący nazwę *cechy homologji*, jest równy dwustosunkowi czwórki punktowej oko_1o_2, gdzie k oznacza punkt przecięcia prostych O i L.

Badanie warunków przemienności homologji linjowej (warunku miarowego i warunku opisowego) doprowadza nas do twierdzenia o harmonicznych własnościach czworokąta zupełnego. Rozważając wreszcie odpowiednie punkty zniknienia i ich rzuty, stwierdzamy istnienie wspólnego środka dwóch odcinków, z których jeden łączy punkty wzajemne, a pozostały jest ograniczony przez ślady prostych O i L.



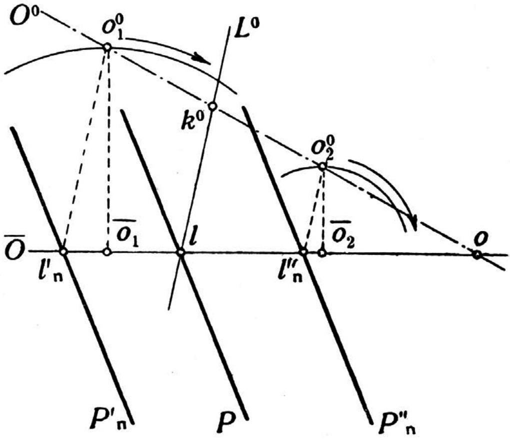
Rys. 7.



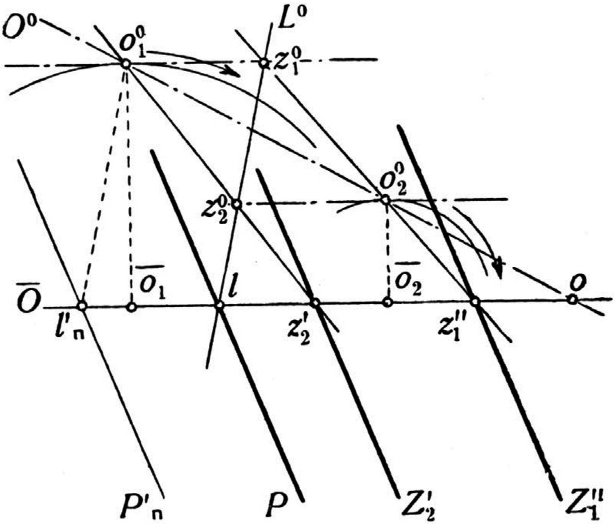
Rys. 8.

§ 5. **Rzuty układu płaskiego.** Gdy zmieniamy środek rzutów w perspektywicznem odwzorowaniu płaszczyzny π, posiadającej ślad P i prostą zbiegu P_n' (rys. 9), to nową prostą zbiegu P_n'' wyznaczamy na zasadzie jednokładności. określonej przez koła oddalenia środków rzutów.

Do podstawowych własności opisowych, polegających na zachowaniu współlinjowości punktów i współpunktowości prostych w przekształceniu homologicznem płaskiem, jak również tych własności, które polegają na istnieniu elementów podwójnych – dołączamy następnie zasadnicze własności miarowe, dotyczące prostych wzajemnych (rys (10) i wspólnej cechy tych linjowych odpowiedniości homologicznych, które są wyznaczone na prostych, przechodzących przez ślad łącznicy środków rzutów. Opierając się na wynikach paragrafu poprzedniego, rozważamy mianowicie pęk płaszczyzn przesuniętych przez prostą O i otrzymujemy następujące twierdzenie: *Homologja płaska jest zbiorem linjowych odpowiedniości homologicznych, posiadających cechę wspólną; podłoża homologji linjowych tworzą pęk promieni, którego środek jest wspólnym punktem podwójnym, a pozostałe punkty podwójne leżą na jednej prostej.*



Rys. 9.



O^0
o_1^0
L^0
z_1^0
o_2^0
z_2^0
$\overline{o}_1$
$\overline{o}_2$
$\overline{O}$
l
o
l'_n
z'_2
z''_1
P'_n
P
Z'_2
Z''_1

Rys. 10.

Antoni Hoborski (Kraków)

Kilka uwag o krzywych regularnych

§ 1. Zajmując się własnościami powierzchni prostolinjowej o krzywej szczytowej, odkryłem kilka twierdzeń o krzywych regularnych, które – zdaje się – są nowe i które w obecnym komunikacie podaję.

§ 2. W przestrzeni niech będzie dana krzywa C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1}$$

gdzie x, y, z oznaczają współrzędne prostokątne punktów. Krzywą C nazwiemy regularną w przedziale (a, b) [gdzie jest $-\infty < a < b < +\infty$] , jeżeli funkcje $x(t), y(t), z(t)$ mają drugie pochodne $x''(t), y''(t), z''(t)$, ciągłe w przedziale (a, b) i jeżeli macierz

$$\begin{vmatrix} x'(t), & y'(t), & z'(t) \\ x''(t), & y''(t), & z''(t) \end{vmatrix}$$

jest rzędu 2 w każdym punkcie tego przedziału.

Tw. 1. Jeżeli krzywa C jest regularną w przedziale (a, b) i jeżeli t_0 jest liczbą tego przedziału, to istnieje liczba dodatnia δ_0 taka, że styczne do krzywej C w żadnych dwu punktach t_1, t_2 nie mają tego samego kierunku, jeżeli liczby t_1, t_2 spełniają związki

$$a \leq t_1 \leq b,\ a \leq t_2 \leq b,\ |t_0 - t_1| \leq \delta_0,\ |t_0 - t_2| \leq \delta_0,\ t_1 \neq t_2$$

pozatem te liczby są dowolne.

Tw. II. Jeżeli krzywa C jest regularną w przedziale (a, b), to żadna styczna do krzywej C nie ma nieskończonej ilości punktów styczności z krzywą C.

Tw. III. Jeżeli krzywa C jest regularną w przedziale (a, b) i jeżeli (l) oznacza daną prostą, to mnogość E stycznych do krzywej C, które mają ten sam kierunek, co prosta (l), jest zawsze skończoną.

Styczną (s) do krzywej C nazwiemy n-krotną, jeżeli ma (n) punktów styczności z krzywą C.

Tw. IV. Jeżeli krzywa C jest regularną w przedziale (a, b), jeżeli t_0 oznacza liczbę tego przedziału i jeżeli styczna s_0 do krzywej C w punkcie t_0 jest n-krotną, to istnieje liczba dodatnia δ_1 taka, że żadna styczna do krzywej C w punkcie t nie jest wyższej krotności, niż styczna s_0, o ile tylko jest $|t - t_0| \leq \delta_1$, $a \leq t \leq b$.

§ 3. W związku z powyższemi twierdzeniami wysłowiłem zagadnienie następujące: niech C będzie krzywą regularną w przedziale (a, b) i niech E_1 będzie mnogością stycznych krzywej C

n-krotnych, gdzie $n \geq 2$; czy może być mnogość E_1 nieskończoną?

P. S. Gołąb rozwiązał to zagadnienie. Udowodnił tw. następujące: jeżeli krzywa jest regularną w przedziale (a, b) i jeżeli nie ma punktów wielokrotnych o wspólnej stycznej, to mnogość E_1 jest skończona.

P. S. Gołąb skonstruował także przykład krzywej regularnej, dla której mnogość E_1 jest nieskończoną.

Alfred Rosenblatt (Kraków)

O utworach trzechwymiarowych, których przestrzenie styczne spełniają pewne warunki różniczkowe

(Sur les variétés à trois dimensions, dont les espaces tangents satisfont à certaines conditions différentielles)

1. Envisageons une variété W_3 à trois dimensions donnée dans un espace linéaire S_{r+1} à $r+1$ dimensions paramétriquement par les équations

$$y_i = u_i(x_0, x_1, x_2), \quad i = 0, \dots, r. \tag{1}$$

Envisageons la matrice M des dérivées partielles

$$M = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|, \quad i = 0, \dots, r \; j = 0, 1, 2 \tag{2}$$

à $r+1$ colonnes et à 3 lignes et désignons par X_{ijk} le mineur d'ordre 3 appartenant aux colonnes i, j, k. Supposons qu'il y ait entre ces mineurs un certain nombre δ

$$\delta \geq \binom{r+1}{3} - 3(r-2) \tag{3}$$

de relations linéaires indépendantes

$$\sum a_{ijk}^{k} X_{ijk} = 0, \quad h = 1, \ldots, \delta. \tag{4}$$

Les plans T_3 tangents à la W_3 coupent l'espace $\bar{S}_r$ à l'infini en des plans $\bar{S}_2$ qui forment un système $\overline{W}$ et qui appartiennent à δ complexes linéaires indépendants. Parmi ces complexes il y a au moins un complexe spécial, c'est à dire il y a à l'infini un espace linéaire $\bar{S}_{r-3}$ auquel s'appuient tous les plans $\bar{S}_2$.

Envisageons maintenant une variété V_3 *algébrique*, possédant $r+1 = p_g - p_a$ intégrales de 1re espèce de M. Picard. Soit Pg le genre géométrique de cette variété et supposons l'inégalité remplie

$$Pg \leq 3(p_g - p_a - 3). \tag{5}$$

Envisageons la variété W_3 donnée par les équations (1) où les u, sont les intégrales de M. Picard. Si l'inégalité (5) est remplie, on a l'inégalité (3), donc il existe au moins un complexe linéaire $\bar{S}_{r-3}$ spécial et alors la variété V_3 possède ou une congruence irrégulière $\{c\}$ de courbes ou un faisceau $\{F\}$ irrationnel de surfaces algébriques.

2. Dans une série de Notes des Comptes Rendus (1924–1926) j'ai fait l'étude complète du cas, où la V_3 possède des faisceaux irrationnels de surfaces de genre ≤ 2 ainsi que du cas où il n'y a pas de tels faisceaux et où dans (5) il y a le signe $<$. Il reste donc à étudier le cas de l'égalité et où la variété V_3 ne possède pas de tels faisceaux.

J'ai résolu la question dans le cas, où le système W de plans $\bar{S}_2$ à l'infini est de dimension 1 ou 2. Notamment je peux énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la variété W_3 qui représente les intégrales de M. Picard de V_3 possède ∞^1 hyperplans tangents, la V_3 possède:* 1) *un faisceau de genre $r-1$,* 2) *ou une congruence d'irrégularité r et un faisceau de genre* 1, 3) *ou une congruence d'irrégularité $r+1$.*

Si il y a ∞^2 hyperplans tangents il y a 1) une congruence d'irrégularité r et un faisceau elliptique 2) ou une congruence d'irrégularité $r+1$, 3) ou une congruence d'irrégularité $r-1$ et une autre congruence d'irrégularité > 2.

La démonstration du théorème sera donnée ailleurs.

Streszczenie. Zagadnienie badania powierzchni algebraicznych i kongruencyj krzywych algebraicznych na utworach algebraicznych trzechwymiarowych sprowadza się do ogólniejszego badania ogólnych utworów trzechwymiarowych i przestrzeni S_3 stycznych do tych utworów. Badania te zapoczątkowane przez Segre'go, a kontynuowane przez Terracini'ego, kontynu-

uję ze szczególnem uwzględnieniem zastosowania do wyżej wymienionego zagadnienia.

Władysław Ślebodziński (Poznań)

O nadpowierzchniach czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej

Niechaj będzie dana forma dodatnia

$$ds^2 = \sum_{ik=1}^{3} a_{ik} dx_i dx_k \tag{F}$$

określająca metrykę pewnej rozciągłości riemannowskiej (V_3). Wiadomo, iż – w ogólności – nie istnieje nadpowierzchnia przedstawiająca (V_3) w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej.

1) Jeżeli krzywizny główne ω_i $(i = 1, 2, 3)$ rozciągłości (V_3) są wszystkie różne od zera, zagadnienie posiada rozwiązanie wtedy, i tylko wtedy, gdy są spełnione następujące warunki:

$$\omega_1 \omega_2 \omega_3 > 0,$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial s_k} = \gamma_{iki}(\rho_i - \rho_k) \quad (i, k = 1, 2, 3,\ i \neq k),$$

$$\gamma_{123}(\rho_1 - \rho_2) = \gamma_{321}(\rho_2 - \rho_3) = \gamma_{312}(\gamma_3 - \gamma_1),$$

w których przyjęliśmy

$$\rho_i = \frac{\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3}}{\omega_i};$$

we wzorach powyższych symbole γ_{hij} oznaczają spółczynniki obrotu Ricci'ego dla trójścianu głównego rozciągłości (V_3), a symbole $\frac{\partial}{\partial s_k}$ pochodne względem łuków krzywych głównych.

2) Jeżeli jedna z krzywizn głównych ω, jest równa zeru, zagadnienie nie posiada rozwiązania.

3) Jeżeli dwie krzywizny główne np. ω_1 i ω_2 są równe zeru, należy odróżnić dwa przypadki:

a) Jeżeli kangruencja główna odpowiadająca krzywiźnie ω_2 rozciągłości (V_3) jest normalna, to forma (F) powinna być równoważna formie

$$(A_1x_3 + B_1)^2 dx_1^2 + (A_2x_3 + B_2)^2 dx_2^2 + dx_3^2,$$

w której funkcje A_i, B_i zmiennych x_1, x_2 powinny być tak dobrane, ażeby były spełnione warunki: 1°. forma $A_1^2 dx_1^2 + A_2^2 dx_2^2$ ma być, odniesionym do krzywiznowych, elementem linjowym powierzchni w przestrzeni o krzywiźnie +1, 2°. muszą być spełnione równości

$$\frac{1}{B_2}\frac{\partial B_1}{\partial x_2} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}, \qquad \frac{1}{B_1}\frac{\partial B_2}{\partial x_1} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}.$$

b) Jeżeli kongruencja główna odpowiadająca krzywiźnie ω_2 nie jest normalna, warunki rozwiązalności zagadnienia sprowadzają się do następujących równości

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\gamma_{313}\omega_3}{\gamma_{231}}\right) = \frac{2\gamma_{212}\gamma_{312}}{\gamma_{213}}\omega_3,$$
$$\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\gamma_{231}\omega_3}{\gamma_{312}}\right) = \frac{2\gamma_{121}\gamma_{321}}{\gamma_{123}}\omega_3,$$
$$\gamma_{123}\gamma_{231} + \gamma_{231}\gamma_{312} + \gamma_{312}\gamma_{123} = 0.$$

Władysław Ślebodziński (Poznań)

Rozwój geometrji różniczkowej w ostatniem dziesięcioleciu

Przedmiotem odczytu jest przedstawienie najnowszych badań poświęconych różnym rodzajom geometrji od czasu ukazania się podstawowej rozprawy p. Levi-Civita.

V. Hlavatý (Praga)

Le calcul absolu et le groupe projectif

Si les coefficients du groupe projectif G sont fonctions de lieu x, ce groupe peut servir comme base à la connection projective de l'espace courbe. (Dans ce cas, en général, la notion du „point" est différente de celle attachée aux coordonées x).

On peut étudier cette connection en l'envisageant comme un problème de la théorie des invariants différentiels du groupe G. Or quatre cas généraux sont possibles. Ou bien le groupe est 1) tout-à-fait général, ou bien il réproduit 2) un point contrevariant, ou 3) un point covariant, ou enfin 4) il réproduit un point covariant et un point contrevariant.

Du point de vue de l'algebre rien de nouveau ne se présente dans ces quatre sous-groupes différents. Il n'en est pas ainsi si l'on poursuit des études analytiques. L'auteur a fait voir les différents aspects de l'analyse de ces sous-groupes de même que les relations qui existent entre les recherches actuelles sur la connection dite „projective" et les méthodes exposées dans cette conférence.

Karol Grycz (Cieszyn)

Wywody geometryczne prawa Foucault'a

(Streszczenie)

Przedstawiam cztery wywody geometryczne prawa Foucault'a.

Co do pierwszego, ograniczam się tylko do przypomnienia, ponieważ z podręczników jest ogólnie znany; opiera się na t. zw. zasadzie zachowania płaszczyzny wahań.

Drugi wywód znalazłem w książce Bauera zr. 1922: „Mathematische Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins nebst einer exakten Darstellung ihrer wichtigsten Ergebnisse". Punktem wyjścia jest następująca definicja przesunięcia równoległego: Wektor, umieszczony na dowolnej powierzchni doznaje przesunięcia równoległego nieskończenie małego, jeżeli jego składowe w odniesieniu do współrzędnych geodezyjnych, po przesunięciu równoległem nieskończenie małem, pozostają niezmienione.

Trzeci wywód, Bertranda z r. 1882 opiera się na mało znanym postulacie Foucault'a z r. 1851 : Gdy pion, przez który zawsze przechodzi płaszczyzna wahań, zmienia kierunek w przestrzeni, położenia po sobie następujące płaszczyzny wahań, określa warunek, że zawierają między sobą kąty minimalne. Przedstawiam uproszczony wywód Bertranda.

Czwarty wywód, mój z r. 1915, nieogłoszony, jest rozwiązaniem następującego zadania.

W chwili t w miejscu obserwacji A_1 na kuli ziemskiej w szerokości geograficznej φ mamy prostą poziomą l_1 pod dowolnym azymutem ψ, wskutek obrotu ziemi w chwili $t + \Delta t$ prosta l_1, zajmie położenie l_2, punkt A_1 położenie A_2; niechaj l_3 będzie prostą poziomą przez A_2, zawierającą kąt minimum z prostą l_1; obliczyć kąt między l_2 i l_3 i przeprowadzić sumowanie.

Zadanie powyższe rozwiązuję środkami geometrji elementarnej.

Dział V. Mechanika, Fizyka matematyczna, Matematyka stosowana

Alfred Rosenblatt (Kraków)

Twierdzenie Kutty i Żukowskiego w aerodynamice

(Sur le théorème de l'aërodynamique de Joukowski et Kutta)

1. Nous envisageons le mouvement bidimensionnel d'un fluide parfait irrotationnel autour d'un corps K de contour F plongé dans ce fluide. Soit $W = \varphi + i\psi$ la fonction analytique dont la dérivée $\frac{dW}{dz} = w = u - iv$ donne le vecteur conjugué du vecteur vitesse.

Le fluide satisfait à l'équation de Bernouilli

$$\rho^2(u^2 + v^2) + p = \text{const.}, \tag{1}$$

la constante étant la même dans tout le fluide.

Si P_x et P_y dénotent les composantes de la résultante des pressions exercées sur le corps K, on a la formule de Kutta–Joukowski

$$P_x + iP_y = i\rho C(u_\infty + iv_\infty), \tag{2}$$

u_∞, v_∞ étant les composantes de la vitesse du fluide à l'infini et C la circulation

$$C = \int_F u dx + v dy, \tag{3}$$

dans le sens contraire du mouvement de l'aiguille d'une montre.

M. Cisotti[1)] a donné un exemple, où la formule (2) est en défaut en envisageant une lame plane inclinée d'un angle β sur la direction du mouvement du fluide. Dans ce cas on a la formule exacte

$$P_x + iP_y = e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta)} \cos\beta \rho C(u_\infty + iv_\infty). \tag{4}$$

J'ai donné [2)] la raison de cette divergeance, en montrant l'influence des points angulaires d'angle 2π du contour sur la valeur de la résultante des pressions. Dans ces points la fonction w^2 a en général un résidu A, c'est à dire elle est de la forme

$$w^2 = \frac{A}{z - z_0} \text{ [1+ fonction continue s'annullant pour } z = z_0]^{3)}. \tag{5}$$

1) „Una notevole eccezione del teorema di Kutta–Joukowski" Rendiconti dei Lincei 1927.

2) „Sur le théorème de Kutta–Joukowski", ibid. 1927.

La formule (2) doit être remplacée par la formule suivante

$$P_x + iP_y = i\rho C(u_\infty + iv_\infty) + \rho\pi \sum \overline{Res_P}(w^2), \qquad (6)$$

où la somme est étendue à tous les résidus des points P d'angle 2π, le trait dénotant que l'on doit prendre la valeur conjuguée complexe.

2. Comme exemple j'envisage le cas d'une lame circulaire ayant la forme d'un arc AB de cercle d'angle 2α, de rayon a. Supposons que β soit l'angle de la vitesse du fluide à l'infini avec la droite AB. La formule

$$z = -i\xi \frac{\xi \sin\frac{\alpha}{2} - a}{\xi - a\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (7)$$

effectue la représentation conforme de l'arc sur le cercle de rayon a du plan ξ. On trouve la formule

$$\begin{aligned} P_x + iP_y = \rho\pi\Big\{ 2iCVe^{i\beta} + \frac{a\sin\alpha}{8}\Big[e^{i\alpha}\Big(2V\sin\Big(\frac{\alpha}{2} - \beta\Big) \\ - \frac{C}{a\sin\frac{\alpha}{2}}\Big)^2 - e^{-i\alpha}\Big(2V\sin\Big(\frac{\alpha}{2}+\beta\Big) - \frac{C}{a\sin\frac{\alpha}{2}}\Big)^2\Big]\Big\}. \end{aligned} \qquad (8)$$

---

[3] M. Lichtenstein a montré cette formule dans le cas des courbes analytiques: „Ueber die konforme Abbildung ebener analytischer Gebilde mit Ecken". Journal für die reine und angewandte Mathematik T. 140.

où V est la valeur absolue de la vitesse et où l'axe des y positifs est dirigé vers le centre de l'arc AB.

Streszczenie. W Nocie ogłoszonej w r. b. w Rendiconti della R. Accademia dei Lincei uzupełniłem wzór na wypadkową ciśnień działających w doskonałej dwuwymiarowej niewirowej cieczy na profil zanurzony, uważając wyrazy pochodzące od residuów funkcji analitycznej należącej do profilu, tłómacząc sprzeczność z twierdzeniem Kutty i Żukowskiego rezultatu, który dla profilu laminarnego płaskiego otrzymał p. Cisotti.

Obecnie zajmuję się pewnymi profilami, dla których występują owe residua i obliczam ciśnienia. Obliczam również momenty, dla których dotychczasowy wzór należy również uzupełnić rozważaniem residuów.

Alfred Rosenblatt (Kraków)

O regularyzacji problematu trzech ciał

(Sur la régularisation du problème des trois corps).

1. Envisageons trois corps P_0, P, P' de masses m_0, m, m' qui se meuvent constamment dans un plan en s'attirant conformément à la loi de Newton. Soient

$$x = x_1 + ix_2 = \overline{P_0 P},$$
$$x' = x_1' + ix_2' = \overline{P_0 P'},$$
$$r = |x|,$$
$$r' = |x'|,$$
$$\Delta = |x'| - |x|.$$

et soient $p = p_1 + ip_2$ et $p' = p'_1 + ip'_2$ les quantités absolues de mouvement. On a les équations canoniques

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dp'_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x'_i}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} H = T - U = {} & \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m'}\Big)(p_1^2 + p_2^2) \\ & + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m'}\Big)({p'_1}^2 + {p'_2}^2) + \frac{1}{m_0}(p_1p'_1 + p_2p'_2) \\ & - f\Big(\frac{m_0m}{r} + \frac{m_0m'}{r'} + \frac{mm'}{\Delta}\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

Dans une Note: „Sur la régularisation du problème plan des 3 corps" (Rendiconti dei Lincei marzo 1926), j'ai introduit les deux vecteurs ξ, ξ' définis par

$$x = 4\xi^2{\xi'}^2, \quad x' = -(\xi^2 - {\xi'}^2)^2, \tag{3}$$

de sorte que

$$\overline{PP'} = x' - x = -(\xi^2 + {\xi'}^2)^2.$$

J'ai ensuite introduit les vecteurs π, π' remplissant la condition assurant la canonicité du changement de variable

$$\bar{\pi}d\xi + \bar{\pi}'d\xi' = \bar{p}dx + \bar{p}'dx, \tag{4}$$

(le trait dénote des quantités conjuguées complexes).

Remplaçons le temps t par la variable indépendante u

$$u = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{rr'\Delta}, \tag{5}$$

et introduisons la nouvelle fonction H^x

$$H^x = rr'\Delta(H - E), \tag{6}$$

(E constante de l'énergie). On a

$$\begin{aligned} r &= 4\xi\bar{\xi}\xi'\bar{\xi}', \quad r' = (\xi^2 - \xi'^2)(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}'^2), \\ \Delta &= (\xi^2 + \xi'^2)(\bar{\xi}^2 + \bar{\xi}'^2). \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} H^x = -rr'\Delta E + \frac{1}{32}\Bigg\{ & \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}\right)(\pi\bar{\xi}' + \pi'\bar{\xi}) \\ & .(\bar{\pi}\xi' + \bar{\pi}'\xi)(\xi^2 - \xi'^2)(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}'^2) \\ & + \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}\right)(\pi\bar{\xi} - \pi'\xi').4\xi\bar{\xi}\xi'\bar{\xi}' \\ & + \frac{2}{m_0}[(\pi\bar{\xi}' + \pi'\bar{\xi})(\bar{\pi}'\bar{\xi}' - \bar{\pi}\xi)\bar{\xi}\bar{\xi}'(\bar{\xi}^2\bar{\xi}'^2) \\ & + (\bar{\pi}\xi' + \bar{\pi}'\xi)(\pi'\bar{\xi}' - \pi\bar{\xi})\xi\xi'(\xi^2 - \xi'^2)]\Bigg\} \\ & - f[m_0 m(\xi^2 + \xi'^2)(\bar{\xi}^2 + \bar{\xi}'^2)(\xi^2 - \xi'^2)(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}'^2) \\ & + 4m_o m'\xi\bar{\xi}\xi'\bar{\xi}'(\bar{\xi}^2 + \bar{\xi}'^2) \\ & + 4mm'\xi\bar{\xi}\xi'\bar{\xi}'(\xi^2 - \xi'^2)(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}'^2)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Les équations canoniques sont alors

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{du} &= 2\frac{\partial H^x}{\partial \bar{\pi}}, & \frac{d\bar{\xi}}{du} &= 2\frac{\partial H^x}{\partial \pi}, \\ \frac{d\pi}{du} &= -2\frac{\partial H^x}{\partial \bar{\xi}}, & \frac{d\bar{\pi}}{du} &= -2\frac{\partial H^x}{\partial \xi} \end{aligned} \tag{9}$$

et quatre autres analogues, valables pour les mouvements qui correspondent à la valeur donnée E de la constante de l'énergie.

L'intégrale des aires est

$$\bar{\pi}\xi - \pi\bar{\xi} + \bar{\pi}'\xi' - \pi'\bar{\xi}' = C. \tag{10}$$

2. On peut au moyen de ces équations étudier facilement les conditions du choc de deux corps, C étant supposé 0. Supposons p. ex. que P_0 et P se choquent, alors ξ ou ξ'' tend vers zéro. ξ', $\bar{\xi}'$, π, $\bar{\pi}$, π', $\bar{\pi}'$ tendent vers des valeurs différentes de zéro. Nous pouvons développer ces fonctions autour du point envisagé suivant les puissances de u. Supposons que ξ, $\bar{\xi}$ tendent vers zéro. On a

$$
\begin{aligned}
\xi &= \xi_1 u + \xi_2 u^2 + \dots, \\
\bar{\xi} &= \bar{\xi}_1 u + \bar{\xi}_2 u^2 + \dots, \\
\pi &= \pi_0 + \pi_1 u + \dots, \\
\bar{\pi} &= \bar{\pi}_0 + \bar{\pi}_1 u + \dots, \\
\xi' &= \xi'_0 + \xi'_2 u^2 + \dots, \\
\bar{\xi}' &= \bar{\xi}'_0 + \bar{\xi}'_2 u^2 + \dots, \\
\pi' &= \pi'_0 + \pi'_1 u + \dots, \\
\bar{\pi}' &= \bar{\pi}'_0 + \bar{\pi}'_1 u + \dots,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

On exprime maintenant $\pi_0, \bar{\pi}_0, \pi'_0, \bar{\pi}'_0$ en $\pi, \bar{\pi}, \xi', \bar{\xi}', \pi', \bar{\pi}'$ et u et on remplace ces valeurs initiales dans les développements de ξ, ξ' par les séries en u obtenues. On obtient les deux séries suivantes

$$
\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)\pi \xi'^3 \bar{\xi}'^2 \\
&\quad + \frac{1}{16^2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)\xi'^4 \bar{\xi}'^4 . \left[\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)\xi'^2 \bar{\xi}' \pi' \bar{\pi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{m_0}\pi\left(\xi'^3 \pi' + \bar{\xi}'^3 \bar{\pi}'\right)\right] u^2 + (u)_3, \\
\bar{\xi} &= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)\bar{\pi} \xi'^3 \bar{\xi}'^3 u \\
&\quad + \frac{1}{16^2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)\xi'^4 \bar{\xi}'^4 . \left[\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)\bar{\xi}'^2 \xi' \bar{\pi}' \pi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{m_0}\bar{\pi}\left(\bar{\xi}'^3 \bar{\pi}' + \xi'^3 \pi'\right)\right] u^2 + (u)_3.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Développons de même $t - t_1$ suivant les puissances de u, et remplaçons dans les coefficients les valeurs initiales π_0 etc par leurs développements. On trouv

$$
t - t_1 = \frac{1}{192}\left[\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)^2\right]\pi\bar{\pi}\xi'^{11}\bar{\xi}'^{11} u^2 + (U)_4. \tag{13}
$$

L'élimination de u des équations (12) donne la condition de choc pour $t - t_1$ non donné suffisamment petit. Ce serait donc la condition nécessaire et suffisante pour que les deux corps P_0, P qui à l'instant t_0 se trouvent suffisamment voisins puissent se choquer dans un temps suffisamment petit. Il faut naturellement envisager aussi la seconde condition, que l'on obtient en échangeant ξ et ξ', $\bar{\xi}$ et $\bar{\xi}'$, π et π', $\bar{\pi}$ et $\bar{\pi}'$.

Le temps $t - t_1$ étant donné suffisamment petit, on aura deux conditions de choc en éliminant u des 3 équations (12) et (13). La seconde paire de conditions s'obtient en échangeant encore ξ et ξ' etc.

2. Ou peut obtenir directement les développements (12) en remplaçant dans les équations (9) ξ et $\bar{\xi}$ par leurs développements en u et en comparant les coëfficients des puissances diverses de u. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} i\xi_i u^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} u^i \Big[\frac{\partial \xi_i}{\partial \bar{\pi}}\frac{d\bar{\pi}}{du} + \cdots + \frac{\partial \xi_i}{\partial \bar{\pi}'}\frac{d\bar{\pi}'}{du}\Big] = 2\frac{\partial H^*}{\partial \bar{\pi}},\\
&\sum_{i=1}^{\infty} i\bar{\xi}_i u^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} u^i \Big[\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \bar{\pi}}\frac{d\pi}{du} + \cdots + \frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \bar{\pi}'}\frac{d\bar{\pi}'}{du}\Big] = 2\frac{\partial H^*}{\partial \pi},
\end{aligned} \tag{14}$$

où il faut remplacer $\frac{d\bar{\pi}}{du}$ etc. par les dérivées de H^*.

Streszczenie. W roku zeszłym (marzec 1926) podałem w Nocie ogłoszonej w Sprawozdaniach Rzymskiej Akademji metodę regularyzacji zagadnienia płaskiego trzech ciał zapomocą przekształcenia kanonicznego prostszego od przekształcenia, zapomocą którego p. Levi-Civita w r. 1916 po raz pierwszy dokonał tej regularyzacji.

Obecnie studjuję tę regularyzację podając w obranych spółrzędnych warunki zderzenia się dwóch ciał i redukując układ kanoniczny przy pomocy całek pól i energji.

P. Sergescu (Cluj)

L'évolution des principes de la mécanique de Newton à Laplace

(Résumé)

La notion moderne de force est totalement absente de la mécanique ancienne. Les corps se meuvent – dit Aristote – en vertu de facultés innées, qui n'impliquent aucune contrainte. Or, le caractère essentiel de la force moderne est de représenter une contrainte. Tout le moyen âge a travaillé sous l'influence d'Aristote.

La renaissance de la mécanique met au premier plan quatre créateurs de la conception moderne: Galilée, Descartes, Newton et Leibniz. La pensée de Descartes a des racines profondes dans le moyen âge; son idéal est de créer un nouveau système du monde, pour remplacer celui d'Aristote, qui était trop en désaccord avec l'expérience. Mais, l'idée même d'un système

du monde appartient au moyen âge. Dans la mécanique, Descartes postule que tout mouvement se propage seulement par contact et qu'il n'y a pas d'agents occults. C'est une idée de bon sens, claire et distincte. La déterminante du mouvement, dans les calculs, est la quantité de mouvement (mv). La physique cartésienne a été contestée, avant même d'être achevée. Et c'est ainsi, que le dernier grand système du monde s'effondre. Les savants déçus des idées générales, se replient sur les îlots de certitude scientifique que l'on avait.

Cela a entraîné un changement fondamental de la méthode scientifique, en mettant dans la vraie lumière le mérite immortel de Galilée, créateur de la méthode expérimentale. Car, l'expérience seule, quantitative, pouvait fournir certains résultats précis, que l'on pouvait considérer comme base solide de la science; tous les systèmes du monde, y compris le cartésien, construits sur des hypothèses qualitatives, avaient fait faillite.

Il manquait encore le concept moderne de force, pour avoir notre mécanique. On le trouve pour la première fois chez Roberval, qui n'a pas pu l'exploiter jusqu'au bout, faute d'appui mathématique suffisant. En effet, la notion de fonction et le calcul infinitésimal n'étaient pas encore connus à cette époque. C'est à peine en 1684 que les immortelles *Principia* de Newton établissent la théorie de l'attraction universelle. Cette force, *qui agit à distance*, a trouvé un accueil très hostile. Grâce aux cartésiens, on était habitué à n'accepter que des idées de bon sens. Or, une action à distance avait un peu trop l'air d'un agent occulte de l'école aristotélienne. La résistance est devenue encore plus grande, quand les succésseurs de Newton comme Keil, ont multiplié les agents mystérieux, en expliquant la cohésion, l'élasticité, etc. par des causes analogues à l'attraction universelle. Ces exagérations expliquent pourquoi les mathématiciens du continent se sont tenus très longtemps loins du système cartésien. Encore en 1727, l'Académie des Sciences de Paris, mettait au concours un sujet sur les tourbillons de Descartes. Si l'école de Descartes s'est éteinte, vers le milieu du XVIII^e siècle, cela est dû au fait que les cartésiens n'étaient pas, en général, des mathématiciens éminents; de plus, la théorie de Newton permettait d'obtenir des résultats très brillants, qui attiraient vers elle les jeunes chercheurs.

Le grand mérite d'avoir rendu accéptable la mécanique newtonienne sur le continent revient à Leibniz. C'est lui qui a trouvé la base philosophique de la notion de force attractive. L'évolution de Leibniz, au point de vue des principes de la mécanique est très curieuse. Dans sa jeuuesse, il était du même avis que Descartes sur la nécessité des explications de bon sens, donc de la transmission du mouvement par contact. Mais en même temps, il avait une violente polémique avec Descartes sur les questions de détail. Leibniz considérait la force vive (mv^2) comme déterminante du mouvement, par opposition avec Descartes (qui considérait mv). C'est Huyghens qui a concilié les deux théories, en remarquant que Descartes s'occupait des chocs et Leibniz des forces ordinaires, de sorte que tous les deux avaient raison.

Vers sa vieillesse, Leibniz entre en polémique avec Newton à propos de l'invention du calcul infinitésimal. Mais, en même temps, il rend compréhensible, au point de vue philosophique, l'idée d'action à distance, donc la mécanique newtonienne.

C'est cette circonstance qui explique pourquoi la codification de la mécanique rationnelle au XVIIIe siècle est due surtout à l'école suisse et allemande sous l'influence directe de Leibniz (les Bernoulli, Euler, Wollf). Il faut y ajouter Clairaut. Euler a donné un exposé presque définitif de la mécanique classique.

En même temps que ce travail de systématisation, on remarque une tendance d'étude des principes. C'est vers le milieu du XVIIIe siècle que D'Alembert énonce le principe que dans tout mouvement, le travail des forces âgissantes est égale au travail des forces d'inértie. Maupertuis énonce le principe de la moindre action, qui a causé un très grand enthousiasme dans le monde scientifique. C'était le premier essai d'introduire l'idée de l'économie de l'effort dans la nature, dans une science exacte.

Le couronnement de la mécanique rationnelle a lieu vers le commencement du XIXe siècle, avec Lagrange et Laplace. Lagrange généralise la notion de force, en introduisant la force de liaison, le potentiel; au lieu du point matériel, il considère comme point de départ de sa mécanique les systèmes de points. Il établit toute la statique sur le principe des vitesses virtuelles; grâce au principe de D'Alembert – dont on n'avait pas compris toute la portée lors de sa découverte – Lagrange réduit la dynamique à la statique. C'est ainsi qu'il crée la mécanique analytique, dernière expression, parfaite, de la mécanique newtonienne.

Laplace marque un point de vue nouveau. Il applique la mécanique rationnelle aux mouvements célestes en donnant la confirmation complète de la théorie newtonienne ; il étudie tous les mouvements jusque dans les moindres détails, en faisant intervenir aussi la nature physique dans les problèmes de la mécanique. Enfin, il introduit le principe statistique, le calcul des probabilités, dans l'étude du mouvement.

Avec Lagrange et Laplace, la mécanique newtonienne a dit son dernier mot, en devenant une science définitivement établie.

La communication présente a été provoquée par le fait qu'en 1927 on a commémoré deux cents ans depuis la mort de Newton (20 Mars 1727) et cent ans depuis la mort de Laplace (5 Avril 1827). P. Boutroux a consacré son cours du Collège de France aux Principes de la mécanique et de l'astronomie depuis l'antiquité jusqu'à Laplace. La mort prématurée l'a empéché de rédiger son beau cours.

Władysław Ślebodziński (Poznań)

Kilka własności grawitacyjnego pola statycznego

Niechaj wzór

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2$$

określa element linjowy świata w grawitacyjnem polu statycznem (S); we wzorze powyższym symbol $d\sigma^2$ oznacza dodatnią formę kwadratową

$$\sum_{ik=1}^{3} g_{ik} dx_i dx_k,$$

której spółczynniki g_{ik}, jak i funkcja f, są niezależne od zmiennej t.

Twierdzenie 12. *Równania różniczkowe promieni świetlnych i trajektoryj punktu swobodnego w polu (S) można otrzymać z tego samego równania*

$$\delta \int \sqrt{\frac{a^2}{f^2} + C} \sqrt{\sum_{ki=1}^{3} g_{ik} dx_i dx_k} = 0,$$

w którem a oznacza dowolną stałą; w pierwszym przypadku należy przyjąć $C = 0$, w drugim $C = -\frac{1}{2}$.

Twierdzenie 13. *Jeżeli promień świetlny i trajektorja punktu swobodnego wychodzą z tego samego punktu i w tym samym kierunku, to obie te linje posiadają w tymże punkcie wspólne trójściany Freneta i równe skręcenia, a stosunek ich krzywizn jest niezależny od wyboru kierunku.*

Twierdzenie 14. *Jeżeli w pewnem polu statycznem promienie świetlne są krzywemi płaskiemi, to trajektorje punktu swobodnego posiadają tę samą własność, i nawzajem.*

Twierdzenie 15. *Jedyne pola statyczne, w których promienie świetlne są krzywemi płaskiemi, są określone wzorami*

$$d\sigma^2 = z^4(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad f = \frac{k}{z}; \tag{A}$$

$$d\sigma^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + \frac{r}{r-\alpha}dr^2, \quad f = c\sqrt{\frac{r-\alpha}{r}}; \tag{B}$$

(*rozwiązanie Schwarzschilda*)

$$d\sigma^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin h^2\vartheta d\varphi^2) + \frac{r}{\alpha-t}dr^2, \quad f = k\sqrt{\frac{\alpha-r}{r}}; \tag{C}$$

we wzorach powyższych symbole α, c, k *oznaczają stałe.*

Leon Lichtenstein (Lipsk): *O prawie Newtona*[1)]. Ob. Math. Zeitschr. 27 (1928), str. 607–622.

Izydor Blumenfeld (Lwów): 1. *O zasadzie Gaussa*. 2. *O pewnym twierdzeniu dynamicznym p. Kroó*.

Jan Weyssenhoff (Wilno): *O konkretnym znaczeniu spółczynników* g_{ik} *w teorji grawitacji*.

Bohdan Babski (Kępno): *Metody matematyczne w ubezpieczeniach społecznych*.

J. Spława-Neyinan (Warszawa): *Podstawowe zagadnienia statystyki matematycznej*.

[1)] Odczyt wygłoszony w Sekcji Ogólnej.

Dział VI. Dydaktyka matematyki

Antoni Łomnicki (Lwów)

O programach nauczania matematyki obowiązujących obecnie w gimnazjach Rzeczypospolitej Polskiej

Celem niniejszego referatu jest krytyczne omówienie programów nauczania matematyki obowiązujących w naszych gimnazjach, wywołanie jak najobszerniejszej dyskusji i przygotowanie wniosków zmierzających do gruntownej rewizji i rekonstrukcji tych programów. Do postawienia tej kwestji na porządku dziennym obrad Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego skłonił nas niezaprzeczony, znany nam wszystkim nadto dobrze fakt a mianowicie powszechne niezadowolenie z istniejących programów.

Godzimy się, jak sądzę, wszyscy na zasadę, że zmiana programów nauczania powinna się odbywać drogą ewolucji, chociażby dlatego, że nauczycielstwo musi się do nowych rzeczy przygotować i wypróbować je odpowiednio. Ponieważ jednak do wskrzeszonego naszego Państwa weszły trzy odmienne tradycje nauczania pochodzące z trzech różnych zaborów, przeto Komisja Programowa stanęła wobec dość trudnego zadania: bądźto pogodzenia tych trzech tradycyj przez wybranie z każdej z nich tego, co w niej było najlepsze, bądźto wybrania jednej, najlepszej. Z tych trudności wybrnęła Komisja w sposób iście Salomonowy: wybrała czwartą tradycję: włoską (zwłaszcza dlą programów geometrji). Zapatrzeni w miłe dla ścisłego matematyka wzory włoskie stworzyli autorowie programów rzecz dla umysłów młodzieży zupełnie niestrawną. Podeptano w ten sposób zasadę ewolucji w dydaktyce i dokonała się daleko idąca rewolucja w planach nauczania. Wady nowego ustroju sięgają tak głęboko, że nie dadzą się usunąć ewolucyjną drogą powolnego nawrotu, – jak to usiłuje czynić obecny Wydział Programowy, lecz należy się uciec do kontrrewolucji, tj. do gruntownej zmiany nowych programów w kierunku powrotu do dawnych wypróbowanych metod i do dawnego materjału nauczania.

Nie zadawalają nas przedewszystkiem cele nauczania matematyki wytknięte przez programy na samym wstępie. Według planów nauka matematyki i to nawet w typie matematyczno-przyrodniczym ma cele wyłącznie formalne: 1) Wdrożyć ucznia do ścisłego rozumowania dedukcyjnego. 2) Przyzwyczaić go do dostrzegania związków funkcjonalnych... 3) Rozwinąć jego intuicję geometryczną... 4) Wyrobić sprawność w stosowaniu matematyki elementarnej do zagadnień. Niema zaś zupełnie mowy o tem, aby dać uczniowi pewien realny, trwały zasób wiadomości, aby go nauczyć rachować i przekształcać wyrażenia algebraiczne, aby go nauczyć najważniejszych twierdzeń geometrycznych i arytmetycznych. Sądzimy, że „wdrożenie do ścisłego rozumowania dedukcyjuego", „dostrzeganie związków funkcjonalnych", „rozwinięcie intuicji geometrycznej" i „sprawność w ujmowaniu zagadnień w formę matematyczną" – wynikną już same przez się jako uboczne produkty przy nauczaniu matematyki, nie mogą zaś być jedynym i najistotniejszym celem tej nauki. Dlatego też sądzimy, że odpowiedniejszem sformułowaniem celów nauczania matematyki byłoby np. następujące:

Celem nauczania matematyki jest zrozumienie i przyswojenie sobie zasadniczych wiadomości z matematyki elementarnej, wprawa w operowaniu symbolami matematycznemi i umiejętne stosowanie zdobytych wiadomości do zagadnień z innych dziedzin nauki i z życia codziennego.

W każdym razie tendencję planów w kierunku daleko idącego szkolenia młodzieży w subtelnych abstrakcjach należy silnie zmodyfikować.

Uprawianie osobno geometrji „czystej", niemetrycznej, a osobno metrycznej uważam uważam za drugą zasadniczą wadę planów. Można podziwiać Greków, że obchodzili się bez arytmetyki i algebry, można się lubować w pięknych rozważaniach Euklidesa z teorji proporcji lub z teorji równoważności figur ale o wiele bardziej interesującym i ważnym jest fakt, że istnieje doskonała odpowiedniość między zbiorem liczb a zbiorem punktów. Wszakże właśnie nowoczesne postępy geometrji i analizy polegają na tem ścisłem zespoleniu się tych dwóch działów nauki. To wiązanie faktów geometrycznych z arytmetycznemi ułatwi uczniowi rozumowania i rozszerzy jego horyzonty. Należy więc jak najczęściej wykazywać ten związek i korzystać z niego przy każdej nadarzającej się sposobności. Uwieńczeniem takiego pojmowania nauczania matematyki powinna być systematyczna, dość obszerna nauka geometrji analitycznej, która lepiej przygotuje ucznia do analizy wyższej i do „stosowania matematyki do zagadnień z innych nauk" aniżeli subtelne rozważania związane z pojęciem granicy. Łatwo zresztą stwierdzić, że młodzież chętniej się zajmuje geometrją analityczną, aniżeli trygonometrją – nie mówiąc już o „równoważności" lub o „proporcjach geometrycznych". Sądzimy zatem, że pożądane jest: *wyraźne i częste akcentowanie metrycznych własności figur geometrycznych i rozszerzenie programu geometrji analitycznej.*

Jako konsekwencje takiego punktu widzenia wynikają dalsze modyfikacje planów w tych działach, które sprawiają najwięcej trudności zarówno uczącym jak i młodzieży, a mianowicie: w teorji równoważności figur i w geometrycznej teorji proporcyj.

I tak przy nauce o pomiarze pól należy odrazu stanąć na stanowisku geometrji metrycznej i przeprowadzać wszystkie rozumowania dawną, tradycyjną, dobrze nam znaną z lat szkolnych metodą – oczywiście po omówieniu poprzedniem stosunków i proporcyj. Natomiast należy zaniechać wszystkich subtelnych rozważań teoretycznych związanych z teorją równoważności zwłaszcza, że nie potrafimy w szkole średniej udowodnić podstawowego dla tej teorji twierdzenia de Zolte'a i musimy wprowadzać ucznia w błąd podając, że to twierdzenie jest pewnikiem (pewniki pojmujemy tutaj jako układ założeń dostatecznych i niezależnych). Nie znaczy to, aby należało pomijać naukę o „zamianie figur na równoważne": te bowiem zagadnienia są interesujące i mają nawet praktyczne zastosowania. Unikać tylko należy subtelności teoretycznych w kwestjach, które są dla ucznia oczywiste.

Proponujemy zatem przesłanie Wydziałowi Programowemu następującego wniosku:

I. *Należy usunąć z nauki geometrji w szkole średniej teorję równoważności figur.*

Podobne stanowisko należy zająć wobec geometrycznej teorji proporcyj. Odrazu należy zastąpić odcinki ich liczbami wymiarowemi (miarami) i wprowadzić odrazu proporcje liczbowe. Zabawa w proporcje geometryczne kosztuje za wiele czasu i wysiłku a ponadto wprowadza nieład, przesuwając w tok planimetrji cały obszerny rozdział stereometrji celem wyprowadzenia twierdzenia Desargues'a. (Nawiasowo nadmienimy, że te karkołomne skoki w programach nie są wcale niezbędne, albowiem można podać dowód twierdzenia Desargues'a bez rozważań stereometrycznych).

Proponujemy więc przesłanie Wydziałowi Programowemu następującego wniosku:

II. *Należy usunąć z nauki geometrji w szkole średniej geometryczną teorję proporcyj; wykładu planimetrji nie należy przerywać ustępami poświęconemi stereometrji.*

Niespokojny, rwany tok nauki jest znamienną cechą nowych planów we wszystkich działach. I tak naukę o kole rozdzielono na dwie części: wstępną i systematyczną, przegrodzone rozdziałami zupełnie innej treści. Przedwczesne omawianie zasadniczych własności koła zmusza do wprowadzenia niepotrzebnych dwóch pewników, śladem nie bardzo fortunnego pomysłu znakomitego zresztą matematyka włoskiego Enriquesa. Trygonometrja jest rozerwana na trzy części, podobnie stereometrja. Wadą programu jest również niezdecydowane stanowisko wobec pewników geometrji. Plany powinny roztrzygnąć w niedwuznaczny sposób: a) czy należy wprowadzać system pewników: b) jakiego systemu pewników należy użyć i c) kiedy ten system należy podać, czy na początku nauki czy na końcu przy rekapitulacji materjału w klasie najwyższej. Zostawienie dowolności w tym punkcie prowadzi do tego dziwacznego zjawiska, że każde gimnazjum musi się posługiwać innym systemem pewników a nawet dwa gimnazja w tem samem mieście będą wyznawały odmienne systemy pewników. Grzech to widoczny przeciwko jednolitości nauki w całej Rzeczypospolitej.

Nadmiernie wiele uwagi poświęcono dyskusji trójmianu i równań kwadratowych. Trzeba większy nacisk położyć na opanowanie samego algorytmu i na układanie równań a dyskusję przeprowadzać tylko sporadycznie na charakterystycznych specjalnie do tego się nadających przykładach, nie bardzo zawiłych.

Wprowadzenie w klasie VII pojęcia granicy bez dalej idących zastosowań (do rachunku różniczkowego i całkowego) nie jest również pomysłem fortunnym. Wystarczy omówić to pojęcie w bardzo skromnych rozmiarach i to dopiero w klasie VIII przy powtarzaniu materjału, syntetyzując i uściślając rozmaite poznane poprzednio fakty i wskazując na dalsze zastosowania. Może kiedyś przy innem ugrupowaniu materjału naukowego i przy przyśpieszonem tempie w poszczególnych działach nauki będzie można rozszerzyć materjał nauki matematyki w szkole średniej przez wprowadzenie zasad rachunku różniczkowego i całkowego i ich interesujących zastosowań. Wtedy oczywiście wykład ten trzeba będzie poprzedzić systematycznem omówieniem granicy. Przy obecnym stanie nauki dział ten jest trudny, niewdzięczny i wydaje się uczniowi niepotrzebną abstrakcją.

Przez opuszczenie niepotrzebnych w szkole średniej a trudnych działów (np. teorja równoważności i geometryczna teorja proporcyj) i przez systematyczniejsze uporządkowanie porozrzucanych działów zyska się tyle na czasie, że będzie można rozszerzyć programy w innych interesujących działach jak np. w geometrji analitycznej, w kombinatoryce wraz z zasadami rachunku prawdopodobieństwa a może i w analizie wyższej.

Nasuwa się tu tyle kwestyj zasadniczo ważnych, że byłoby pożądanem, aby Zjazd wyłonił obszerną komisję, któraby przygotowała projekt zmian w obecnych planach i zajęła się opracowaniem zupełnie nowego, racjonalnego planu nauczania matematyki na przyszłość.

Edward Biegański (Łowicz)

Dowód twierdzenia o stosunku przekątnych czworoboku wpisanego w koło

Oznaczenia: czworobok $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, E = punkt przecięcia przekątnych.

Z podobieństwa trójkątów

$$BCE \text{ i } ADE, \text{ dalej } CDE \text{ i } ABC$$

Przytoczony tu dowód różni się od stosowanych dotychczas dowodów tem, iż jest oparty li tylko na podobieństwie dwu par trójkątów utworzonych z boków i odcinków przekątnych czworoboku. Dowód ten opublikowałem w r. 1915 w miesięczniku »Математическое Оброзование« Nr. 29 (w Moskwie).

mamy kolejno :

$$\frac{BE}{AE} = \frac{b}{d}$$
$$\frac{ED}{AE} = \frac{c}{a}$$

Dodając te równości stronami, otrzymujemy :

$$\frac{BD}{AE} = \frac{ab + cd}{ad}$$

skąd

$$\frac{AE}{BD} = \frac{ad}{ab + cd} \tag{1}$$

Podobnież

$$\frac{EC}{BD} = \frac{bc}{ab + cd} \tag{2}$$

Dodając stronami równości (1) i (2), otrzymujemy:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Władysław Mickiewicz (Zamość)

Obecna szkoła ogólnokształcąca, program matematyki w niej i pożądane zmiany

> L'avancement, le perfectionnement des mathématiques sont liés à la prospérité de l'État.
>
> Napoléon.

Program roku 1926 rozróżnia trzy wydziały gimnazjum: matematyczno-przyrodniczy, humanistyczny i klasyczny. Ilość gimnazjów klasycznych jest mała. Program matematyki w pierwszym i drugim typie gimnazjów zbudowany jest na takich zasadach („cel nauczania"), że „wyrobienie sprawności w stosowaniu matematyki elementarnej do zagadnień, zaczerpniętych z innych nauk oraz ze zjawisk życia codziennego" znalazło się na czwartem miejscu, podczas gdy inne cele zajmują pierwsze miejsca. Podstawą programu algebry jest dyskusja równań. Geometrja otrzymała program tak zwany fuzjonistyczny. Wreszcie najoryginalniejszy jest program trygonometrji, w którym oddzielono naukę o trójkątach prostokątnych od nauki o trójkątach ukośnokątnych, a miara teoretyczna kątów znalazła się na samym końcu w VIII^{ej} klasie. W klasie VI gimnazjum humanistycznego musimy prawie na początku roku nauczyć rozwiązywania trójkątów prostokątnych, a zaledwie w klasie VII^{ej} przechodzimy logarytmy. Niema wcale w programie kreślenia geometrycznego, mamy zaś, a w wydziale matematyczno-przyrodniczym nawet w obszernym zakresie, geometrję wykreślną. Niema w programie początków rachunku różniczkowego i całkowego.

Jako podstawę naszych rozważań w pewnych razach przyjmiemy nowe programy szkół średnich we Francji, tak zwane programy lat 1923 i 1925 wraz z instrukcją roku 1925, które stanowią ostatni rezultat pedagogicznej myśli francuskiej.

Plan nauki jest ułożony z wielką precyzją. Najważniejszy jest dla nas program matematyki i fizyki z chemją. Otóż program ten jest zupełnie jednostajny w klasach drugiej do siódmej obu wydziałów. Różnica jest tylko w programie klasy ósmej, gdyż na wydziale filozoficznym na matematykę i fizykę z chemją przeznaczono odpowiednio tygodniowo 2 i 3 godziny, na wydziale zaś matematycznym $9\frac{1}{2}$ i $4\frac{1}{2}$ godziny.

Widzimy znaczne rozczarowanie co do tak zwanej dyskusji. Badanie równań stopnia drugiego należy obecnie do kursu klasy VII^{ej}. Instrukcja 1925 roku mówi tak: „W algebrze, studjowanie trójmianu i zastosowanie do zadań stopnia drugiego doszło do wielkiej doskonałości. Należy jednak ubolewać, że część mechaniczna odgrywa tu tak wybitną rolę i że myśl o przyszłych egzaminach wypacza czasami logikę nauczania, zbyt jednostronnie oznaczając porządek dyskusji" i t. d. (p. 168).

W klasie VIII^{ej} na wydziale filozoficznym we Francji przechodzą początki rachunków różniczkowego i całkowego, a na wydziale matematycznym, prócz tego, powtarzają całą matematykę i biorą: trygonometrję, z geometrji – o przekształcaniu figur i o przecięciach stożkowych, geometrję wykreślną, kinematykę, statykę.

Bardzo dokładne instrukcje z dnia 2 września 1925 roku wyjaśniają pewne szczegóły, które dotyczą nauczania matematyki. Wielką uwagę zwraca się na rachunek pamięciowy, tak u nas zaniedbany. W klasie trzeciej już mamy zadania, które dają równania stopnia pierwszego. Geometrja zaczyna się w klasie czwartej. Nie została przyjęta metoda fuzjonistyczna, chociaż powstała ona we Francji (Gergonne, Mahistre, Charles Méray). O radjanie uczeń francuski dowiaduje się w klasie szóstej w rozdziale geometrji „o kołach". Instrukcja nakazuje ćwiczyć uczni w używaniu instrumentów, gdy tylko to może nastąpić, zaczynając od klasy czwartej; oczywiście chodzi tu o kreślenie geometryczne. Rozdział o logarytmach uczniowie przechodzą w siódmej klasie przed zaczęciem trygonometrji.

To, cośmy przytoczyli, zmusza do sformułowania szeregu wniosków:

Program matematyki musiałby odpowiadać następującym wymaganiom:

a) we wszystkich działach matematyki program winien być, o ile można, zupełnie jednostajny w odpowiednich klasach wszystkich typów szkół, prócz klasy ósmej szkół średnich, gdzie różnice programów możnaby wprowadzić w obszernym zakresie;
b) w każdym dziale program winien być zupełnie konkretny, mając na względzie, iż uczeń, kończący szkołę średnią i nawet powszechną, musi głównie i przedewszystkiem mieć wyrobioną zupełną sprawność w stosowaniu nabytej wiedzy do wszelkiego rodzaju zagadnień teoretycznych lub praktycznych;
c) uczeń, który kończy trzy klasy szkoły średniej, winien gruntownie przestudjować arytmetykę; w niższych klasach metoda nauczania arytmetyki powinna być genetyczna, lecz nie aksjomatyczna;
d) program algebry musi więcej uwzględniać działy, mające zastosowanie praktyczne, zwracając znacznie mniej uwagi na tak zwaną dyskusję. W najwyższym stopniu natomiast byłoby pożądane wprowadzenie początków rachunków różniczkowego i całkowego;
e) program geometrji winien być zupełnie zmieniony z odrzuceniem metody fuzjonistycznej. Należy wprowadzić kreślenie geometryczne, geometrję zaś wykreślną nieco ograniczyć;

f) program trygonometrji winien być ułożony racjonalnie, tak aby uczeń dowiedział się o istnieniu radjanu na początku kursu (lub, jeszcze lepiej, w odpowiednim dziale geometrji). Niema potrzeby oddzielać studjowanie trójkątów prostokątnych od studjowania trójkątów ukośnokątnych.

Wacław Myślicki (Grodno)

Wykres funkcji kwadratowej z jednym parametrem zmiennym i dyskusja niektórych zadań, których rozwiązanie prowadzi do równania kwadratowego

Wykres funkcji kwadratowej z jednym parametrem zmiennym $y = f(x)$ można uskuteczniać w sposób następujący: odnajdujemy miejsce geometryczne wierzchołków zbioru parabol, wyznaczonych daną funkcją, rugując z układu równań $x_0 = f(m)$ i $y_m = f_1(m)$ zmienny parametr m. Otrzymamy zależność $y_m = f(x_0)$, która przedstawia miejsce geometryczne wierzchołków parabol, wyznaczonych zależnością $y = f(x)$.

Wykreśliwszy to miejsce geometryczne wierzchołków parabol, bierzemy pod uwagę zależność $x_0 = f(m)$ i rozwiązujemy ją co do m. Otrzymamy $m = f_1(x_0)$ i układamy tabelkę zmienności tej zależności.

Wypisujemy wartości parametru dla odpowiednich wierzchołków parabol na linji wierzchołków tych parabol.

Biorąc pod uwagę spółczynnik przy x^2 i wyraz wolny danej funkcji $y = f(x)$, możemy wykreślać poszczególne parabole.

Punkty przecięcia się poszczególnych parabol z osią x-ów dadzą pierwiastki funkcji.

Przy wykresie niektórych funkcyj można wprowadzić uproszczenia i ułatwienia, a mianowicie tych, które mają punkty stałe (tj. punkty, przez które przechodzą wszystkie parabole danego zbioru).

By funkcja kwadratowa miała na wykresie punkty stałe, wystarczy, aby spółrzędne tych punktów nie były zależne od parametru; spółrzędne te odnajdujemy w ten sposób, iż bierzemy parametr przed nawias i wyrażenie w nawiasie przyrównujemy zeru. Stąd odnajdziemy odcięte stałych punktów; wstawiając zaś zamiast x otrzymane wartości odciętych odnajdziemy odpowiednie rzędne.

Mając stałe punkty, łatwo wykreślimy funkcję kwadratową $y = f(x)$ i łatwo na podstawie wykresu zbadamy pierwiastki tej funkcji dla różnych wartości parametru.

Autor podaje kilka przykładów dyskusji zadań przy pomocy wykresów.

Karol Grycz (Cieszyn)

Nauczanie matematyki we współczesnej Austrji

(Streszczenie)

Komunikat jest oparty na lekturze odpowiednich czasopism dydaktycznych i na spostrzeżeniach dokonanych w czasie zwiedzania średnich Zakładów w Wiedniu w maju 1927 r.

Na wstępie wypowiadam kilka zdań o organizacji szkolnictwa średniego we współczesnej Austrji.

Przechodząc do nauczania matematyki, porównuję materjał naukowy w szkołach średnich w Polsce, z materjałem w odpowiednich szkołach w Austrji.

Główną treścią komunikatu jest metodyka nauczania. Wyjaśniam na czem polega stosowanie metody szkoły pracy przy nauczaniu matematyki we Wiedniu i wyprowadzam wnioski dotyczące nauczania matematyki w Polsce.

Otton Nikodym (Kraków)

O nauczaniu nierówności w wyższych klasach szkoły średniej

Celem nauczania matematyki w wyższem gimnazjum jest stopniowe wprowadzenie ucznia w świat myślenia pojęciowego. W szczególności, należy uczniów przyzwyczaić do porządnej dedukcji. Nie znaczy to, by wszystkie twierdzenia należało porządnie w szkole udawadniać; na to niema czasu, – zresztą niektóre dowody byłyby za trudne. Dużo twierdzeń musi się często podać bez dowodu a tylko niektóre, mianowicie dające się łatwo i prosto udowodnić, należy poprzeć odnośnym, dobrze przemyślanym dowodem. Tzw. pseudo-dowody, od których roją się podręczniki szkolne – są bardzo szkodliwe, gdyż hamują rozwój umysłowy ucznia.

Poniżej wskażę dziedzinę, w której można bardzo porządne dowody podać uczniom – co więcej, można ją przedstawić w postaci aksjomatycznej i to nawet na dość niskim poziomie rozwoju umysłowego uczniów: w klasie IV$^{\text{tej}}$ gimnazjalnej.

Że tak jest istotnie, miałem sposobność przekonać się doświadczalnie, uzyskując u przeszło 70% uczniów zupełnie wystarczające zrozumienie rzeczy.

Dziedziną tą jest teorja nierówności, przez co rozumiem teorję związków mających postać $a < b$, $b > a$, a rozpatrywaną w zakresie liczb względnych ułamkowych (które oprócz liczb ułamkowych dodatnich i ujemnych, obejmują też liczbę 0).

Zanim przystąpię do wyłożenia właściwej rzeczy, muszę podać, jakie wiadomości i dyspozycje uczniowie muszą posiadać, by można było przystąpić do uczenia teorji nierówności poniżej przedstawioną metodą.

Zakładam, że oprócz rozumienia istoty czterech działań na liczbach względnych ułamkowych, uczniowie znają i umieją stosować zasadnicze prawidła przekształcania wyrażeń arytmetycznych (w omawianym zakresie liczb). Dla wyjaśnienia nadmieniam, że przekształcić wyrażenie dane znaczy napisać nowe wyrażenie o tej samej wartości. Oto główne prawidła przekształceń: prawidło opuszczania nawiasów, przemienności wyrazów w wielomianie, mnożenia wielomianu przez wielomian, redukcji wyrazów podobnych, redukcji ułamków o równych mianownikach.

Po drugie zakładam, że uczniowie znają zasadnicze twierdzenia o równościach prawdziwych. Np. Jeżeli w równości prawdziwej przekształcimy jedną lub obie strony, wówczas nowa, otrzymana równość będzie także prawdziwą. Pozostałe twierdzenia dotyczą dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia obu stron nierówności prawdziwej przez jednę i tę samę liczbę (względnie przez wyrażenia, mające równe wartości).

Po trzecie zakładam znajomość praw formalnych, rządzących równością: symetrja, zwrotność, przechodniość.

Co do dyspozycyj logicznych, zakładam, że uczniowie udowadniali już twierdzenia geometryczne (nawet tzw. „oczywiste"), że wiedzą, co to jest założenie a co teza. Zakładam, że wiedzą, co to znaczy oprzeć się na jakiemś twierdzeniu; dalej, że wiedzą, iż nie wolno oprzeć się na twierdzeniu, które nie było wykazane lub wyraźnie przyjęte bez dowodu. Zakładam dalej, że wiedzą, iż definicja słowa, znaku lub zespołu znaków jest to umowa[1)] dotycząca znaczenia tego znaku lub zespołu znaków. W końcu zakładam, że uczniowie umieją poprawnie zastosować wyżej podane ogólne twierdzenia arytmetyczne do przykładów szczególnych.

Metoda uczenia nie ma polegać na wykładzie lecz na rozmowie z uczniami, którzy powinni być przyzwyczajeni do swobodnego wypowiadania się, do interpelacji, do zapytania się o każdy niejasny dla nich szczegół. Nauczyciel wstrzymuje się zupełnie od klasyfikacji w czasie przerabiania nowej lekcji, mówi powoli, wyraźnie i nie za wiele, jest cierpliwy i nigdy nie gniewa się na ucznia, gdy odpowie źle lub niedorzecznie: raczej dyskutuje z nim.

Jeszcze jedna uwaga: żadne tzw. liczby „ogólne" nie istnieją

---

1) a nie zaś jakiś opis pojęcia za pośrednictwem genus proximum i differentia specifica.

(w nauce szkolnej) podobnie jak niema żadnych „ogólnych” punktów w przestrzeni; wszystkie liczby są szczególne jakkolwiek mogą być oznaczone literami.

Obecnie przystępuję do rzeczy właściwej, którą przedstawię w szkicu, używając takiego (mniejwięcej) języka, jakim należy przemawiać do uczniów. Jasną jest rzeczą, że wszystko, co nastąpi, powinno być opracowane szczegółowo i rozszerzone pytaniami ćwiczebnemi. – Teorja zajmie dwa do trzech tygodni czasu, licząc 3–4 godziny tygodniowo.

Dotychczas używaliśmy liter na oznaczenie liczb. Obecnie umówmy się oznaczać literami też wyrażenia arytmetyczne, mające wartość. Np. wyrażenie $3 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 7$, będziemy mogli, gdy tylko zechcemy, oznaczyć jakąś literę np. a. Natomiast $\frac{1}{0}$ nie będziemy oznaczali żadną literą, gdyż forma ta nie ma żadnej wartości Ta sama litera oznaczać będzie jednakie wyrażenie; różne litery – różne lub jednakie wyrażenia. Umówmy się mówić, że wyrażenie jest dodatnie, jeżeli wartość jego jest dodatnia; że jest ujemne, jeżeli wartość jego jest ujemna. Aby zaznaczyć, że wyrażenie a jest dodatnie, umówmy się pisać a dod.; aby zaznaczyć, że b jest ujemne, umówmy się pisać b uj $-a$ dod., b uj. są to zdania, które mogą być prawdziwe albo fałszywe.

Jesteśmy przekonani, że

I. jeżeli a dod., $a = a'$ wówczas a' dod.
II. jeżeli a uj., $a = a'$, wówczas a' uj.
III. jeżeli a dod., wówczas $-a$ uj.
IV. jeżeli a uj., wówczas $-a$ dod.

V. jeżeli a dod. oraz b dod., wówczas $a+b$ dod.
VI. jeżeli a dod. oraz b dod., wówczas $a.b$ dod.
VII. jeżeli a dod., wówczas $\frac{1}{a}$ dod.
VIII. O każdem wyrażeniu a (mającem wartość) można powiedzieć że zawsze zachodzi jedna ale tylko jedna z trzech możliwości :

1) a dod. 2) a uj. 3) $a = 0$.[2)]

Przypomnijmy sobie znane twierdzenia o równościach (równaniach) prawdziwych, oraz znane twierdzenia o przekształceniu wyrażeń w zakresie liczb względnych ułamkowych[3)].

Def. 1. Mając dwa wyrażenia a, b (mające wartość), umówmy się, że zespół znaków

$$a < b \quad [\text{czytamy } a \text{ mniejsze od } b]$$

[2)] Twierdzenia te należy wyjaśnić uczniom dokładnie na przykładach, by uzyskać przekonanie o prawdziwości twierdzeń. Ponadto należy owe twierdzenia wyrazić dodatkowo w postaci następującej: np. gdybyśmy przypuścili, że pewne wyrażenie a jest dodatnie, tobyśmy mieli prawo wywnioskować, że $-a$ jest ujemne. Np. gdyby $-3+1$ było dodatnie, toby $-(-3+1)$ było ujemne. Zaznaczam, że oswojenie ucznia z wyciąganiem wniosków z przypuszczeń, nawet fałszywych, jest niezmiernie ważne dla wszystkich dowodów »nie wprost«. Wielką staranność należy poświęcić twierdzeniu VIII., które orzeka właściwie dwie rzeczy 1) że przynajmniej jedna z ewentualności zajść musi 2) że nigdy dwie równocześnie zajść nie mogą.

[3)] Powyższy wstęp zajmie dwie lekcje w klasie dobrej zaś trzy w klasie słabszej.

oznaczać będzie to samo, co zdanie:

$$b - a \text{ dod.}$$

Układ znaków $a < b$ jest więc zdaniem, które może być prawdziwe albo fałszywe.

Def. 2. Mając dwa wyrażenia a, b (mające wartość), umówmy się, że zespół znaków

$$a > b \quad [a \text{ większe od } b]$$

oznaczać będzie to samo, co $b < a$.

Uczniowie kojarzyli dotychczas ze słowem »większy« i »mniejszy« znaczenie wzięte z życia codziennego. Otóż należy pokazać uczniom, że słowo »mniejszy« i »większy« co innego znaczyć będą, niż w życiu codziennem. I tak np. -4 jest mniejsze od -1, gdyż $(-1) - (-4)$ itd., chociaż wyda się im, że powinnoby być przeciwnie. Cel: przyzwyczajenie ucznia do rozumienia słowa w znaczeniu *umówionem* a nie zaś tylko zgodnie z przyzwyczajeniami życia codziennego.

Będziemy teraz udowadniali różne twierdzenia, postępując podobnie, jak w geometrji: będzie założenie, teza, dowód – a przy każdym kroku będziemy wyraźnie podawali, na czem się opierać będziemy.

Postanowimy sobie jednak, ot tak dla zabawy, że wolno nam będzie opierać się wyłącznie: 1) na twierdzeniach I.–VIII., które nazwiemy aksjomatami, 2) na twierdzeniach o równościach prawdziwych, 3) na prawie symetrji, zwrotności i przechodniości dla równości, 4) na twierdzeniach które przedtem udowodnimy, wreszcie 5) na definicjach 1. 2., nie wolno zaś nam będzie oprzeć się na jakiemkolwiek twierdzeniu, nawet prawdziwem, które nie należy do wyliczonych tu twierdzeń. Np. nie wolno będzie się nam oprzeć na tem, że gdy a uj. i b uj. to $a.b$ dod. – o ile tego twierdzenia wpierw nie udowodnimy.

Twierdzenie 16. *Jeżeli*

1. $a < b$
2. $b = b'$

to $a < b'$.

Dowód. Z założenia 1.:

$$a \underset{\text{Def 1}}{<} b$$

$$b - a \quad \text{dod.} \tag{1}$$

Z założenia 2.:

$$b = b'.$$

Stosuję twierdzenie o odejmowaniu tego samego wyrażenia od obu stron równości prawdziwej

$$b - a = b' - a. \tag{2}$$

Do (1) i (2) stosuję aksjomat I.:

$$b' \underset{\text{Def 1}}{-} a \quad \text{dod.}$$

$$a < b'$$

c. b. d. o. $\square$

Twierdzenie 17. *Jeżeli*

1. $a < b$
2. $a = a'$

wówczas

$$a' < b.$$

Twierdzenie 18. *Jeżeli*

1. $a < b$
2. $a = a'$
3. $b - b'$

wówczas

$$a' = b'.$$

Twierdzenie 19. *Jeżeli*

1. $a < b$
2. $b < c$

wówczas

$$a < c.$$

Dowód. Z założenia 1.:

$$a \underset{\text{Def 1}}{<} b \tag{1}$$

$$b - a \quad \text{dod.}$$

Z założenia 2.:

$$b \underset{\text{Def 1}}{<} c$$

$$c - b \quad \text{dod.} \tag{2}$$

Do (1) i (2) stosuję aksjomat V.:

$$(b - a) + (c - b) \text{ dod.} \tag{3}$$

Na podstawie praw przekształceń prawdą jest, iż:

$$\begin{aligned} (b - a) + (c - b) &= \quad \text{(prawo opuszcz. nawiasów)} \\ = b - a + c - b &= \quad \text{(prawo redukcji wyrazów podobnych)} \\ = -a + c &= \quad \text{(prawo przemiennosci wyrazów)} \\ &= c - a. \end{aligned}$$

Pierwsze wyrażenie równa się drugiemu, drugie trzeciemu, trzecie czwartemu – przeto pierwsze równa się czwartemu. – Czyli

$$(b - a) + (c - b) = c - a. \tag{4}$$

Do (3) i (4) stosuję aksjomat I.:

$$c \underset{\text{Def. 1}}{-} a \quad \text{dod.}$$

$$a < c$$

c. b. d. o. □

Nie należy silić się, by koniecznie wydobyć metody heurystyczną pierwsze dowody od uczniów. Należy to jednak czynić z dowodami późniejszymi, o ile nie wchodzi tu jakaś istotnie nowa i nieznana uczniom metoda.

Widać, jak się będzie rozwijać teorja w dalszym ciągu. Po kilku lekcjach uczniowie sami potrafią niejedno, nawet nowe twierdzenie udowodnić oraz będą zgłaszać liczne zadania tzw. „zadania z własnej pilności" (zadania nieobowiązkowe uważam za najbardziej kształcące). Nawet nowe twierdzenia będą lepsi uczniowie wykrywali i podawali ich dowody.

Eksperymentowałem powyższą teorję wielokrotnie w klasach IV, V, VI, VII i VIII i nie zauważyłem zbyt wielkiej różnicy w zdolności pojmowania tej teorji w powyższych klasach. Teorja ta ma tę zaletę, że przedstawia pewien cały system dedukcyjny, który będzie można kiedyś omówić w VIII61 klasie przy okazji ogólnych uwag o budowie matematyki, sama zaś daje sposobność do wpajania w uczniów, obok poczucia ścisłości też wielu pojęć logiki formalnej, np. pojęcie równoważności zdań ogólnych: (Przykład I. a dod. i II. $a > 0$ są równoważne, co oznacza: z założonej prawdziwości pierwszego zdania wynika prawdziwość drugiego i odwrotnie).

Szymon Ohrenstein (Drohobycz)

Teorja proporcji w klasie piątej gimnazjum humanistycznego i matematyczno-przyrodniczego

Celem niniejszego referatu jest zwrócenie uwagi na pewien sposób wykładu geometrycznej teorji proporcji, przewidzianej w punkcie czwartym programu geometrji dla klasy piątej gimnazjum humanistycznego i matematyczno-przyrodniczego. Według programu należy podać definicję „odcinków proporcjonalnych jako odcinków wyznaczonych na ramionach kąta przez pęk prostych równoległych". Teorja proporcji oparta na tej definicji zależna jest od twierdzenia Desargues'a dla trójkątów o bokach odpowiednio równoległych. Dlatego też punktem trzecim programu, poprzedzającym proporcjonalność odcinków, jest ustęp o względnem położeniu prostych i płaszczyzn w przestrzeni, zawierający wspomniany przypadek szczególny twierdzenia Desargues'a (którego dowód, jak wiadomo, łatwiej przeprowadzić opierając się na twierdzeniach stereometrycznych). Przerobienie tego ustępu stereometrji w klasie piątej nastręcza jednak znaczne trudności i wymaga takiej ilości lekcyj, że w praktyce nie starczy czasu na teorję proporcji. Jeżeli się chce wyzyskać wartości kształcące nauki pierwszych rozdziałów stereometrji, należy ją zdaniem mojem przesunąć do klasy szóstej. W tej klasie można już bowiem wprowadzić pojęcie dowodu zupełnego, do czego znakomicie nadają się dowody twierdzeń o wzajemnem położeniu prostych i płaszczyzn. Należy więc usunąć z klasy piątej twierdzenie Desargues'a, a zatem obrać inną definicję proporcjonalności odcinków jako punkt wyjścia geometrycznej teorji proporcji. Uważam, że można zastosować z korzyścią wykład teorji proporcji, który podał za Hilbertem[1)] w formie uproszczonej B. Levi[2)].

Podaję niżej szkic tej teorji z pewnemi drobnemi i nieistotnemi zmianami, podyktowanemi jednak względami dydaktycznemi, zaznaczając, że stosowałem ją kilkakrotnie z dobremi wynikami.

Definicja 1. Para odcinków a, b jest proporcjonalna do pary odcinków c, d to znaczy, że kąt leżący naprzeciw a w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b jest równy kątowi

---

[1)] Grundlagen der Geometrie, IV Aufl. 1913, rozdział III.

[2)] Porówn.: Zagadnienia dotyczące geometrji elementarnej zebrał i ułożył F. Enriques, tom I. Krytyka podstaw. Z drugiego wyd. włoskiego przełożyli St. Kwietniewski i Wł. Wojtowicz, Warszawa 1914, str. 214 oraz: F. Enriques i U. Amaldi, Zasady geometrji elementarnej do użytku szkół średnich przełożył Wł. Wojtowicz, Warszawa 1916, str. 200.

leżącemu naprzeciw c w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych c, d.

Wprowadza się oznaczenie: $a : b = c : d$ i terminy: proporcja, wyrazy skrajne etc.

Twierdzenie 1. $a : b = a : b$ *(zwrotność)*

Twierdzenie 2. $a : b = c : d \,.\supset .\, c : d = a : b$ *(symetrja)*

Twierdzenie 3. $a : b = c : d \,.\, c : d = e : f \,.\supset .\, a : b = e : f$ *(przechodniość)*

Twierdzenie 4. *Do odcinków a, b, c istnieje przynajmniej jeden odcinek d taki, że $a : b = c : d$.*

Twierdzenie 5. $a : b = c : d_1 \,.\, a : b = c : d_2 \,.\supset .\, d_1 = d_2$.

Dowody powyższych twierdzeń są bardzo łatwe.

Definicja 2. Odcinka czwartego proporcjonalnego.

Lemat 1. *Jeżeli przekątne czworoboku wpisanego przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który dzieli jedną na odcinki a, d a drugą na odcinki b, c, to*

$$a : b = c : d \text{ i } a : c = b : d.$$

W dowodzie należy powołać się na równość kątów wpisanych i na definicję proporcji.

Twierdzenie 6. $a : b = c : d \,.\supset .\, a : c = b : d$.

Dowód. Niech proste p i r przecinają się pod kątem prostym w punkcie O. Na prostej p obieramy punkt 1 a na prostej r punkty B i C po przeciwnych stronach punktu 0 tak aby $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Okrąg, przechodzący przez punkty A, B, C, przecina prostą p w drugim punkcie X takim, że $OX = x$. Z lematu 1 wynika:

$$a : b = e : x \text{ i} \tag{1}$$

$$a : c = b : x \tag{2}$$

Z założenia i z (1) wynika (tw. 5):

$$x = d \tag{3}$$

z (2) i (3) wynika teza. □

Twierdzenie 7. $a : b = c : d \,.\supset.\, (a + b) : (c + d) = a : c.$

Dowód. Niech 0 będzie wierzchołkiem kąta prostego. Na jednem ramieniu tego kąta obieramy punkty A i B a na drugiem punkt C tak, aby $OA = a$. $OB = a + b$, $OC = c$. Przez B prowawadzimy równoległą do AC, przecinającą OC w punkcie X. Przez A prowadzimy równoległą do OC, przecinającą BX w punkcie E. Niech $AE = x$ zatem $CX = x$. Mamy proporcje:

$$a : c = b : x \tag{4}$$

$$(a + b) : (c + x) = a : c. \tag{5}$$

Z założenia wynika:

$$a : c = b : d. \tag{6}$$

Z (5) i (6) wynika:

$$x = d. \tag{7}$$

Z (5) i (7) wynika teza. $\square$

Twierdzenie 8. $p : p' = r : r' \,.\, q : q' = r : r' \,.\supset .\, (p + q) : (p' + q') = r : r'$.

Dowód opiera się na twierdzeniach 23, 3, 6 i 7.

Lemat 2. *Jeżeli r i r' oznaczają promienie kół wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC i $A'B'C'$ i jeżeli $\measuredangle A = \measuredangle A'$ i $\measuredangle B = \measuredangle B'$ to $AB : A'B' = r : r'$.*

Dowód. Oznaczmy środki kół wpisanych odpowiednio przez O i O' a punkty styczności boków AB i $A'B'$ przez D i D'. Niech $AD = p$, $A'D' = p'$, $BD = q$, $B'D' = q'$. Z trójkątów OAD i $O'A'D'$ oraz OBD i $O'B'D'$ mamy:

$$p : r = p' : r' \text{ i } q : r = q' : r'$$
$$\text{stąd} \quad p : p' = r : r' \text{ i } q : q' = r : r'$$

stosując twierdzenie 8 otrzymamy tezę. $\square$

Definicja 3. podobieństwa trójkątów.

Twierdzenie 9. *Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.*

Dowód na podstawie lematu 2.

Twierdzenie Talesa jest wnioskiem z twierdzenia 9. Dalsze twierdzenia teorji proporcji i podobieństwa trójkątów wyprowadza się jak zwykle.

Na zakończenie pozwalam sobie dodać, że uważam, iż geometryczna teorja proporcji nadaje się szczególnie do „wdrożenia ucznia do ścisłego rozumowania dedukcyjnego", co według programu jest pierwszym z celów nauczania matematyki w szkole średniej.

Stanisław Pająk (Lwów)

Uwagi dotyczące metody nauczania matematyki w klasach wyższych gimnazjum

Wynik pracy szkolnej zależy: a) od młodzieży, b) od nauczycieli, c) od programu, d) od metody nauczania.

W obecnych czasach dają się zauważyć niedomagania w nauce szkolnej wskutek:

ad a) 1) nienależytego doboru młodzieży, 2) powierzchownego jej studjum;

ad b) 1) braku dostatecznej wiedzy u nauczycieli, 2) braku odpowiedzialności za wyniki pracy, 3) przyjmowania za wielu obowiązków;

ad c) 1) wprowadzenia do programu materjału zbyt wysokiego, 2) rozłożenia materjału niestosownie do sił duchowych i zainteresowania młodzieży, 3) braku systematycznego wyczerpywania materjału;

ad d) 1) przeceniania wartości heurezy, 2) grzechów przeciw zasadzie : repetitio est mater studiorum, 3) grzechów przeciw zasadzie: budować można tylko na mocnych fundamentach, 4) niedoceniania wartości pracy domowej ucznia, 5) braku zestawienia wzorowych zadań.

Środki zaradcze:

ad a) 1) dopuszczać do studjów młodzież zdolną, a przez podniesienie wymagań zmusić ją do gruntownej pracy, 2) nie pozbawiać młodzieży czasu potrzebnego jej na naukę domową;

ad b) 1) potrzebne są kursy dokształcające dla nauczycieli, 2) odpowiedzialność dyscyplinarna nauczycieli za brak wiedzy uczniów w szczególności przy egzaminie dojrzałości, 3) potrzebne jest określenie maximum zatrudnienia ubocznego z równoczesnem zabezpieczeniem zaspokojenia potrzeb życiowych;

ad c) 1) wyłączyć z programu kl. V przybliżenia liczbowe, jako mało interesujące, 2) zrezygnować z obliczania liczb niewymiernych przez tworzenie ciągów, jako praktycznie uciążliwego i rabującego wiele czasu, 3) zrezygnować w kl. VII z pojęcia granicy, ciągów liczbowych zbieżnych i rozbieżnych, jako przerastającego siły ogółu uczniów, 4) położyć większy nacisk na układanie równań z zadań tekstowych w kl. V, 5) zadania dyskusyjne, których rozwiązanie prowadzi do równania kwadratowego z jednym parametrem zmiennym przenieść z kl. VI, gdzie nie budzą zainteresowania i zrozumienia należytego do klasy VII względnie dopiero VIII;

ad d) 1) heurezę stosować przy rozwiązywaniu zadań, materjał teoretyczny zaś winien nauczyciel wykładać, pociągając do współpracy uczniów, 2) ustalić kanon typowych zadań dla każdej klasy, które każdy uczeń winien opanować, 3) przestrzegać zewnętrznej systematyczności w traktowaniu materjału.

4) Egzekutywa:

α) żądać opanowania pamięciowego wzorów, β) żądać wyuczenia się biegłego materjału przeznaczonego do przerobienia w domu, γ) nie zadawać do domu zbyt dużo ale za to żądać biegłości, δ) wyznaczać materjał do przerobienia z własnej pilności zwłaszcza z zadań i interesować się nim;

5) Przeciwdziałać prawu zapomnienia przez:

α) kontrolę opanowania poszczególnych lekcyj. β) zestawienie wyników poszczególnych rozdziałów, γ) powtarzanie przez ćwiczenia odpowiednich działów koncentracyjnych, δ) powtarzanie całości z końcem półrocza i roku, ε) powtórzenie głównych zadań w kl. VIII.

S. Steckel (Kielce)

O pojęciu granicy w szkole średniej

Najważniejszym bodaj zagadnieniem z zakresu dydaktyki matematyki w klasach wyższych szkół średnich, jakie praktyka szkolna obecnie wysuwa, jest kwestja wprowadzenia pojęcia granicy. Kwestja ta nie była dotychczas prawie zupełnie omawiana w naszej literaturze dydaktycznej, lecz nie ulega wątpliwości, że oświetlenie jej i dyskusja może w pewnej mierze przyczynić się do racjonalnego nauczania tego działu matematyki szkolnej. Zapoczątkowanie takiej dyskusji jest celem referatu.

Przedewszystkiem nasuwa się pytanie, jaką rolę należy przyznać pojęciu granicy w całokształtcie materjału szkolnego i w jakim zakresie mają być opracowane zastosowania tego pojęcia. Następnie ważną jest sprawa metody nauczania tego działu i w związku z tem kwestja pogodzenia wymagań poprawności logicznej z warunkami dostępności dla umysłu ucznia.

Jak wiadomo, już niektóre najprostsze zagadnienia matematyki szkolnej wymagają stosowania pojęcia granicy. Z drugiej strony ma to pojęcie olbrzymie zastosowanie w wszystkich dziedzinach matematyki i nauk ścisłych. Pozatem posiada pojęcie granicy ogromną wartość kształcącą, gdyż w dużym stopniu rozwija zdolność do abstrakcyjnego myślenia. Względy te przemawiają za poświęceniem szczególnej uwagi tak samemu pojęciu granicy, jak i jego zastosowaniom. W programie gimn. państwowego pojęcie granicy wraz z zastosowaniami tworzy część kursu kl. VII. Sądzę, że ścisłe opracowanie tego działu w klasie VII winno poprzedzać opracowanie propedeutyczne w kl. VI, gdyż uczeń, znający już pewne zastosowania pojęcia granicy, lepiej oceni konieczność ścisłej definicji i wartość ścisłego dowodzenia. Za propedeutycznem opracowaniem w kl. VI, przemawia również ten wzgląd, że niektóre tematy z matematyki lub fizyki (jak np. pojęcie prędkości) w kl. VI wymagają przynajmniej intuicyjnego zrozumienia pojęcia granicy. Jeżeli chodzi o zastosowania pojęcia granicy, to program wymienia następujące tematy: postęp geometryczny nieskończony, pomiar koła, objętość ostrosłupa, pomiar brył obrotowych. Nie znajdujemy natomiast w programie zastosowania pojęcia granicy do zagadnienia styczności. Zagadnienie to jednak, które posiada pierwszorzędne znaczenie w dziejach rozwoju nauk matematycznych, winno być opracowane w gimnazjum. Zagadnienia takie, jak obliczenie objętości ostrosłupa jako granicy sumy objętości graniastosłupów, winny być tak opracowane, aby uczeń mógł sobie należycie uświadomić myśl przewodnią rozumowania, prowadzącego drogą uogólnienia do pojęcia całki. Przy omawianiu szeregów nieskończonych nie należy poprzestać jedynie na szeregach geometrycznych, ale należy również opracować kilka pouczających przykładów szeregów niegeometrycznych. W gimnazjach matem.-przyrodniczych możnaby się nawet posunąć aż do wyprowadzenia kryterjów zbieżności d'Alembert'a i Cauchy'ego. Kwestję wprowadzenia do klas wyższych gimnazjum elementów rachunku różniczkowego i całkowego uważam za drugorzędną z punktu widzenia ogólnych celów nauczania. Natomiast od szkoły średniej musimy bezwarunkowo się domagać, aby ucznia przynajmniej przygotowała do zrozumienia odnośnych pojęć i zagadnień rachunku nie- skończonościowego, co da się osiągnąć przez odpowiedni wybór materjału nauczania z dziedziny zastosowań pojęcia granicy i staranne opracowanie tematów, mających bliski związek z podstawowemi zagadnieniami rachunku różniczkowego i całkowego. W każdym razie należałoby się zastanowić, czyby nie było jednak pożytecznem włączyć elementy rachunku nieskończonościowego do programu. Zaznaczyć należy, że na Zachodzie rachunki t. zw. wyższe niemal wszędzie są objęte programem matematyki i niekiedy przerabiane są w bardzo szerokim zakresie.

Przy wprowadzeniu pojęcia granicy występuje trudność bardzo poważna natury dydaktycznej zaraz na początku, bo już przy definicji granicy ciągu nieskończonego. Definicji tej nie można drogą heurezy wydobyć od ucznia, lecz musi ona być przez nauczyciela odrazu narzucona i następnie dopiero przy czynnym udziale klasy analizowana. Jest tedy ważnem zadaniem nauczyciela uprzednio przygotować uczniów do zrozumienia nowego pojęcia, a to zapomocą odpowiednio dobranych zadań i ćwiczeń. Jest bardzo pożytecznem przed podaniem definicji granicy ciągu zaznajomić uczniów z terminem: „prawie wszystkie wyrazy", wprowadzonym przez G. Kowalewskiego; zwrot ten ogromnie upraszcza wysłowienie i ułatwia zrozumienie tej definicji. Określanie granicy ciągu przy pomocy pojęcia miejsca skupienia uważam za niewskazane w szkole średniej. Definicja granicy winna być podana w szacie arytmetycznej i następnie interpretowana geometrycznie. Dowody twierdzeń z teorji granic muszą być przeprowadzone zupełnie ściśle. Racjonalne nauczanie omawianego działu matematyki wymaga szczególnie starannego doboru zadań, przerabianych w klasie i zadawanych uczniom do domu. Wchodzą tu w rachubę dwa rodzaje zagadnień, a mianowicie zadania na zastosowanie pojęcia granicy do algebry, geometrji, trygonometrji, geometrji analitycznej i zadania o charakterze teoretycznym; zadań tej drugiej kategorji nie można zupełnie pominąć w szkole średniej, służyć mają one do należytego ugruntowania i pogłębienia pojęcia granicy.

Program ministerjalny przewiduje opracowanie w kl. VII prócz pojęcia granicy jeszcze trygonometrji i znacznej części stereometrji. Niewielka stosunkowo ilość godzin, jaką można w tych warunkach poświęcić pojęciu granicy nie pozwala na należyte pogłębienie strony teoretycznej ani na gruntowniejsze opracowanie zastosowań. Celem uzyskania czasu potrzebnego na opracowanie pojęcia granicy w myśl postulatów wyżej przytoczonych, należałoby niektóre punkty programu kl. VII przesunąć do kl. VI. Taka modyfikacja programu dałaby się przeprowadzić nawet bez konieczności powiększenia ilości materjału naukowego w kl. VI, gdyby zgodzić się na mniej szczegółowe niż dotychczas opracowanie teorji trójmianu w kl. VI. A sądzę, że w naszych gimnazjach poświęcamy zbyt dużo miejsca teorji trójmianu i że to dzieje się ze szkodą dla innych działów matematyki, bardziej może pouczających i interesujących.

Stefan Banach (Lwów): *O pojęciu granicy*. Ob. *Rachunek różniczkowy i całkowy* t. I, rozdz. I, Lwów 1929.
Antoni Rusiecki (Warszawa): *O nauczaniu przybliżeń dziesiętnych w szkole średniej*.

Uzupełnienie do komunikatu p. T. Ważewskiego (str. 186) nadesłane w czasie druku

1. Twierdzenie umieszczone na wstępie streszczenia mego komunikatu (str. 186) zostało ogłoszone już poprzednio przez p. Kintchine'a – o czem dowiedziałem się podczas kongresu dzięki uprzejmej informacji p. N. Bary. Twierdzenie to cytuję jako twierdzenie p. Kintchine'a w swej nocie "Un théorème sur les fonctions dérivables" (Ann. de la Soc. Polon, de Math. T. VI. str. 91).
2. Str. 189, wiersz 5 od dołu zamiast koniecznym i wystarczającym ma być wystarczającym.