100 lat PTM

filozofia matematyki

patroni sesji

Stanisław Leśniewski Jan Łukasiewicz

ptm rok zał. 1919

Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich
w stulecie Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Kraków 3 -7 września 2019

Indeks abstraktów

Indeks abstraktów

New Science of Infinity

Piotr Błaszczyk pb@up.krakow.pl
Uniwersytet Pedogogiczny w Krakowie

Cantor established two kinds of infinity: cardinal and ordinal numbers, each with its own arithmetic and its own relation *greater than*. In modern developments, ordinal numbers are special sets, cardinal numbers are specific ordinal numbers. In both cases, the set of natural numbers $\mathbb{N}$ makes the yardstick of infinity – be it the cardinal number $\aleph_0$ or the ordinal ω. Thus, Cantor's theory of infinite numbers defines finite number as a positive integer, and it seeks to extend the system $(\mathbb{N}, +.\cdot, 0, 1, <)$. However, while Cantor infinities try to extend the system of finite numbers, they hardly mimic its arithmetic, e.g. the addition and multiplication of ordinal numbers are not commutative.

In our theory, finite number is a real number. By extending the system $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ we obtain a non-Archimedean field that necessarily includes infinitesimals. Accordingly, we define infinite numbers as inverses of infinitesimals. The 'biggest' non-Archimedean field is the field of surreal numbers as developed in [2] and [4]. We show that it includes Cantor's ordinal numbers, although their sums and product differ from sums and products as defined by Cantor. Therefore, in our theory, Cantor's infinite numbers as well as infinitesimals belong to one and the same mathematical system of a commutative ordered field. Thus, in addition to the number ω, that system also includes numbers like $-\omega$, $\frac{\omega}{2}$, ω^{-1}, as well as $\sqrt{\omega}$ (since the field of surreal numbers is a real closed field). Similarly, within that system each Cantor's ordinal number is subject to ordered field operations.

We show that our specific understanding of finiteness originates in Euclid's notion of *megethos*. Then, *via* a field of line segments as developed in [3], it evolved into a non-Archimedean field explored in [5], and [6]. In fact, Euler explicitly defined infinite numbers as inverses of infinitesimals. On the other hand, Cantor repeatedly sought to prove inconsistency of infinitesimals. Within our framework, we can easily demonstrate flaws in his arguments.

References

[1]. G. Cantor. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer-Verlag, Berlin, 1932.
[2]. J.H. Conway, *On numbers and games*, Academic Press, London, 1976.
[3]. R. Descartes, *La Géométrie*, Jan Maire, Leiden, 1637.
[4]. H. Gonshor, *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*. Cambridge UP, Cambridge, 1986.
[5]. L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum*, Lausanae 1748.
[6]. L. Euler, *Institutiones Calculi Differentialis*. Saint Petersburg 1755.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Najwcześniejsza postać metamatematyki Hilberta

Jerzy Dadaczyński jerzy.dadaczynski@upjp2.edu.pl
Uniwersytet Papieski Jana Paw¸a II w Krakowie

Celem wystąpienia jest analiza pierwszej (1922) z długiej serii prac Hilberta, w których prezentuje on swój program formalizmu. Hilbert po raz pierwszy jawnie wprowadza tutaj metamatematykę – we wcześniejszym podejściu, w roku 1904, nie rozróżniał on jeszcze poziomu przedmiotowego i metaprzedmiotowego. Pokazano zostanie, że w roku 1922 uczony z Getyngi wprowadził faktycznie kilka poziomów (nie tylko, jak się powszechnie uważa, dwa: sformalizowaną matematykę i metamatematykę) matematyki. Istnieje poziom beztreściowych znaków arytmetycznych (symbol „I-Z”), poziom treściowej arytmetyki (*inhaltliche Arithmetik*) (symbol „II-T”), w której opisuje się poziom I-Z, poziom sformalizowanej matematyki (symbol „II-F” – Hilbert postuluje pełną formalizację matematyki) i poziom treściowej (*inhaltliche*) metamatematyki (symbol „III-MM”), który opisuje poziom II-F.

Hilbert podkreśla, że relacja III-MM do II-F jest taka sama, jak relacja II-T do I-Z (opis, badanie). W ten sposób stara się on charakteryzować (treściową) metamatematykę. Wyraża on przekonanie, że na poziomie III-MM będzie możliwe przeprowadzenie dowodu niesprzeczności sformalizowanej matematyki z poziomu II-F, co było zasadniczym celem Hilbertowskiego formalizmu.

W ramach wystąpienia dokonana zostanie analiza pierwszego Hilbertowskiego dowodu twierdzenia metamatematycznego. Wskazane zostanie że uczony z Getyngi założył na poziomie (treściowej) metamatematyki (III-MM) część treściowej arytmetyki z poziomu II-T oraz logikę klasyczną.

W roku 1922 Hilbert nie rozróżnił jeszcze *explicite* ani matematyki finistycznej i infinistycznej, ani matematyki realnej i idealnej. Pokazane zostanie, że *implicite* taki podział był już przez niego wtedy przyjmowany. Pozwala to wysunąć przypuszczenie, że Hilbert już w roku 1922 posiadał koncepcję – ujawnioną kilka lat później – finistycznego dowodu niesprzeczności matematyki infinistycznej. Poza tym był on świadomy, w związku z zarzutami Brouwera, potrzeby wyjaśnienia kwestii logicznych podstaw matematyki klasycznej.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Granice rozumowań opartych na diagramach

Marlena Fila marlena.fila@up.krakow.pl
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Jeśli $(F, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym, $f : [0, 1] \mapsto F$ jest funkcją ciągłą taką, że $f(0)f(1) < 0$, wtedy $f(x) = 0$, dla pewnego $x \in (0, 1)$ (IVT). Odpowiadający powyższemu twierdzeniu diagram, *diag(IVT)*, przedstawia wykres funkcji f przecinający prostą $(F, <)$ w punkcie leżącym między 0 oraz 1.

W [2] Brown twierdzi, że *diag(IVT)* jest wystarczającym argumentem na rzecz istnienia punktu przecięcia wykresu funkcji f z prostą $(F, <)$. W [3] Giaquinto twierdzi, że *diag(IVT)* nie może być dowodem IVT, ponieważ istnieją funkcje ciągłe nieróżniczkowalne, których nie można przedstawić w postaci graficznej.

W wystąpieniu polemizujemy z tezami Browna i Giaquinto. Twierdzimy, że rozumowanie oparte na diagramie jest wiarygodne, o ile istnieje formuła, której reprezentacją jest dany diagram.

Bibliografia

[1]. Bernard Bolzano, *Rein analytischer Beweis*, Gotlieb Hasse, 1817.
[2]. James R. Brown, *Proofs and Pictures*, Brit. J. Phil Sci., vol. 48 (1997), 161–180.
[3]. Marcus Giaquinto, *Crossing curves: A limit to the use of diagrams in proofs*, Philosophia Mathematica, vol. 19 (2011), 181–207.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Początki geometrii euklidesowej jako przykład poznania rozszerzonego

Mateusz Hohol mateusz.hohol@uj.edu.pl
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych i Uniwersytet Jagielloński

W trakcie wystąpienia będę bronił tezy, że proponowane dotychczas kognitywne teorie matematyki, skupiające się jedynie na indywidualnych czynnikach poznawczych, są niewystarczające by wyjaśnić genezę jej cech, takich jak abstrakcyjność pojęć, konieczność rozumowań i uniwersalność wyników. Na przykładzie Elementów Euklidesa pokażę, że dedukcyjna geometria mogła powstać tylko w specyficznej niszy poznawczej, w której dostępne publicznie artefakty – oznaczone literami diagramy oraz język formularny – umożliwiały kolaborację uczonych, rozszerzając ich indywidualne zdolności poznawcze. Następnie wskażę implikacje tej tezy zarówno dla psychologii matematyki, która bada współczesną formę poznania geometrycznego, jak i filozofii matematyki.

Bibliografia

[1]. M. Hohol, *Foundations of geometric cognition*, Routledge, New York, 2019 (w druku).
[2]. M. Hohol, M. Miłkowski, *Cognitive artifacts for geometric reasoning*, Foundations of Science, online first:
https://doi.org/10.1007/s10699-019-09603-w (2019).
[3]. R. Netz, *The shaping of deduction in Greek mathematics: A study in cognitive history*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Suprasubiektywne istnienie w matematyce

Stanislaw Krajewski stanislaw.krajewski@uw.edu.pl
Uniwersytet Warszawski

Matematycy to realiści platońscy, jeśli chodzi o istnienie bytów matematycznych, ale gdy ich nacisnąć, by powiedzieli, na czym to istnienie polega, wycofują się i skrywają za tarczą postawy formalistycznej. Można uwzględnić oba stanowiska z równą powagą. W tym celu wprowadzone jest pojęcie istnienia suprasubiektywnego. Zakłada ono istnienie intersubiektywne oraz dodatkowo podkreślenie obiektywności, która jest jednakowoż pozbawiona obiektów. Ta idea jest zilustrowana zaczerpniętym od Williama Byersa porównaniem z tęczą. Tęcza nie jest obiektem, ale ma szczególną subiektywną obiektywność.

Bibliografia

[1]. S. Krajewski, *On Suprasubjective Existence in Mathematics*, Studia semiotyczne XXXII.2: 75–86 (2018).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

O dowodzie w matematyce

Roman Murawski rmur@amu.edu.pl
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

Przedmiotem referatu jest analiza roli i znaczenia dowodu w matematyce. Rozróżnia się dowody nieformalne i dowody formalne. Podkreśla się, że podstawową funkcją dowodów w praktyce badawczej matematyków jest weryfikacja i wyjaśnianie. Rozważa się problem dopuszczalnych metod w dowodach nieformalnych, w szczególności używanie komputera. Porównuje się cechy dowodu formalnego i nieformalnego podkreślając psychologiczne, socjologiczne i kulturowe aspekty dowodów nieformalnych i akcentując syntaktyczny charakter dowodów formalnych versus semantyczny charakter dowodów nieformalnych.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Negacja tezy Churcha a zupełność arytmetyki

Jerzy Mycka jerzm@hektor.umcs.lublin.pl
Uniwersytet im. Marii Curie-Skłodowskiej

Współautor:
Adam Olszewski adam.olszewski@upjp2.edu.pl
Uniwersytet Papieski Jana Paw¸a II w Krakowie

Praca zajmuje się badaniem konsekwencji potencjalnej fałszywości tezy Churcha (CT). Przyjmujemy tutaj następujące mocne sformułowanie CT: pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej w sensie intuicyjnym jest identyczne z pojęciem funkcji rekurencyjnej. Fałszywość CT będzie oznaczała, iż pod pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej w sensie intuicyjnym podpada więcej funkcji, niż pod pojęcie funkcji rekurencyjnej.

Referat zajmuje się zbadaniem konsekwencji dołączenia takiej funkcji do arytmetyki Peana (PA). Okazuje się, że samo istnienie funkcji efektywnie obliczalnych a nierekurencyjnych nie poszerza znacząco możliwości dowodowych PA. Jednak odpowiednie zintegrowanie takich funkcji z systemem aksjomatów (czyli modyfikacja PA^+) pozwala poszerzyć zakres zdań prawdziwych posiadających dowód w PA^+.

Bibliografia

[1]. G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
[2]. A. Olszewski and J. Mycka, *Czy teza Churcha ma jeszcze jakieś znaczenie dla informatyki*, Informatyka a filozofia. Od informatyki i jej zastosowań do światopoglądu informatycznego, 53–74 (2015).
[3]. W. Sieg, Step by Recursive Step: *Church's Analysis of Effective Calculability*, Bull. Symbolic Logic, 3(2):154–180 (1997).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Koncepcja post-transgresyjnej nadinterpretacji w filogenezie i ontogenezie matematyki

Zbigniew Semadeni semadeni@mimuw.edu.pl
Uniwersytet Warszawski (emeryt) oraz Wyższa Szkoła Gospodarki Euroregionalnej w Józefowie

Filogeneza matematyki to jej ewolucyjny rozwój historyczny, a *ontogeneza matematyki* to jej rozwój w umyśle pojedynczego człowieka. Przymiotnik *post-transgresyjny* odnosi się do *matematycznej transgresji poznawczej* rozumianej jako przekroczenie — przez pojedynczego człowieka lub przez społeczność uczonych — pewnego wcześniejszego ograniczenia poznawczego, pewnej granicy wiedzy lub nieprzekraczalnej bariery przekonań naukowych. Takie kluczowe przejście z pewnego niższego poziomu rozwojowego danej idei na wyższy mogło dokonać się w umyśle jednego człowieka lub trwać stulecia. Do najbardziej znanych transgresji należy przejście od takiej linii prostej, jaką zapewne pojmował Euklides, do linii prostej o aktualnie nieskończonej długości oraz przejście od prostej Euklidesa do prostej ciągłej (takiej jak u Dedekinda). Analogiczne transgresje związane z nieskończonością (bądź ich brak) stwierdzano u licealistów, np. przy kwestii, ile wynosi suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ Mniej znanym przykładem, choć bardzo ważnym, jest niemożność uczniów I klasy do myślenia o sumie np. $4 + 3$ jako o pojedynczej liczbie (liczbą jest dla nich dopiero wynik 7 otrzymany po wykonaniu dodawania, przedtem zaś $4 + 3$ jest jedynie poleceniem obliczenia). Przy pewnych transgresjach chodzi o pozornie nieistotny wzrost abstrakcji danego pojęcia, który początkowo jest jednak nie do pokonania.

Post-transgresyjna nadinterpretacja polega na tym, że osoba po danej transgresji często nie jest w stanie wejść w sposób myślenia osoby przed transgresją i nieświadomie przypisuje jej myśli na wyższym, bardziej abstrakcyjnym poziomie świadomości. Jest to ukryty czynnik, który należy starać się uwzględniać przy analizach z historii matematyki.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

W jakim sensie matematyka jest aprioryczna?

Jan Woleński jan.wolenski@uj.edu.pl
Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania w Rzeszowie

Kant podzielił sądy na analityczne i syntetyczne oraz aprioryczne i aposterioryczne. Skrzyżowanie tych podziałów daje trzy kategorie: analityczne (są a priori z definicji), syntetyczne a priori i syntetyczne a posteriori. Poszczególne stanowiska w filozofii matematyki mogą być scharakteryzowane przez wskazanie (charakterystyka nawiązuje do Ajdukiewicza) z jakich sądów składa się matematyka czysta (ze stosowaną są pewne dodatkowe problemy). Aprioryści skrajni (np.Husserl) uważają, że z sądów syntetycznych a priori, aprioryści umiarkowani (np. Kant), że z sądów analitycznych (logika) i syntetycznych a priori (arytmetyka, geometria), empiryści umiarkowani (np. logiczni empiryści), że z sądów analitycznych, a empiryści skrajni (np. J. S. Mill), że z sądów syntetycznych a posteriori. Możliwe są też rozmaite warianty, np. Leibniz, apriorysta skrajny w ogólności, twierdził, że każda prawda jest analityczna, ale miał na myśli, że niektóre z nich mają charakter infinitarny – opierają się na nieskończonych układach przesłanek. Kategoria aprioryczności jest wyróżniona i stwarza rozmaite problemy. Empirysta umiarkowany zgadza się, by tak rzec, na minimum aprioryczności i lokuje je w analityczności. Jest jednak empirystą i ma problem z wyjaśnieniem genezy sądów (zdań), które są uniwersalnie ważne. Apriorysta skrajny ma kłopot z wyjaśnieniem poznania gwarantującego sądy syntetyczne a priori. Na ogół odwołuje się do jakoś rozumianej intuicji, ale brak zgody na czym ma ona polegać. Apriorysta umiarkowany dziedziczy wyżej wskazane kłopoty – Kant przyjął, że czas (podstawa matematyki) i przestrzeń (podstawa geometrii) są kategoriami wbudowanymi w rozum teoretyczny. Wydaje się, że potrzebny jest jakiś kompromis pomiędzy aprioryzmem a empiryzmem. Jednym z rozwiązań może być przyjęcie warunkowego a priori. Znaczyłoby ono, że aksjomaty teorii matematycznych są pierwotne w stosunku do aktualnego doświadczenia, ale motywowane dotychczasowym stanem praktyki matematycznej. Wszystko wskazuje na to, że umysł ludzki ma zdolność takiego przetwarzania informacji symbolicznej, które generuje jej przyrost na wyjściu. Można to uznać za źródło matematycznego a priori, wprawdzie zależnego od stanu na wejściu, ale jednak wykraczającego poza stan wyjściowy. Rachunek prawdopodobieństwa dostarcza pewnej inspiracji (prawdopodobieństwo a priori).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji