100 lat PTM

geometria algebraiczna

patron sesji: Alfred Rosenblatt

ptm rok zał. 1919

Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich

w stulecie
Polskiego Towarzystwa Matematycznego

Kraków 3 -7 września 2019

Spis treści

Nakrycia Kleina gładkich krzywych zespolonych genusu 2

Paweł Borówka

Pawel.Borowka@uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Nakryciem Kleina gładkiej krzywej zespolonej nazywamy czterokrotne nakrycie nierozgałęzione o grupie monodromii izomorficznej z grupą czwórkową Kleina. Takie nakrycia definiowane są przez podgrupy Kleina punktów dwutorsyjnych Jakobianu. W związku z tym, rozróżniamy dwa rodzaje nakryć: izotropiczne i nieizotropiczne w zależności od wartości parowania Weila na podgrupie Kleina. Po przypomnieniu podstawowych faktów, omówimy własności nakryć Kleina krzywych genusu 2. W szczególności, pokażemy, że powstałe krzywe genusu 5 zawierają 7 inwolucji, opiszemy krzywe ilorazowe i scharakteryzujemy rozmaitości Prym nakryć. Opis ten pozwoli pokazać, że w przypadku nieizotropicznym krzywa nakrywająca jest krzywą hipereliptyczną. Najważniejszym wnioskiem z konstrukcji jest twierdzenie, że odwzorowanie Prym jest injektywne w obu przypadkach. Powyższe wyniki powstały we współpracy z dr Angelą Ortegą.

References

[1] P. Borowka, A. Ortega, *Hyperelliptic curves on* $(1, 4)$ *polarised abelian surfaces*, Math. Z. to appear

[2] P. Borowka, A. Ortega, *Klein coverings of genus 2 curves*, arXiv:1904.05962

Wyżej wymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau typu Kummera

Dominik Burek

dominik.burek@doctoral.uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Na podstawie konstrukcji z pracy [1] skonstruujemy rozmaitości Calabiego-Yau dowolnego wymiaru, wykorzystując krzywe eliptyczne posiadające automorfizm rzędu 6. Podamy liczby Hodge'a wszystkich rozmaitości w ten sposób skonstruowanych. Uogólnimy również rezultat z pracy [2] otrzymując dowolnie wymiarową rozmaitość Calabiego-Yau, która jest Zariskiego w charakterystykach $p \not\equiv 1 \pmod{12}$.

Bibliografia

[1] S. Cynk, K. Hulek, *Higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds*, Canad. Math. Bull. **50** (2007), 486–503.

[2] T. Katsura, M. Schütt *Zariski $K3$ surfaces*, arXiv preprint arXiv:1710.08661.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Uniform matrix product states from an algebraic geometer's point of view

Adam Czapliński
adam.czaplinski@uni-siegen.de
Universität Siegen, Germany

Co-authors:
Mateusz Michałek
michalek@mis.mpg.de
Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences,
Inselstraße 22, 04103 Leipzig, Germany and
Aalto University, Espoo, Finland

Tim Seynnaeve
tim.seynnaeve@mis.mpg.de
Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences,
Inselstraße 22, 04103 Leipzig, Germany

In this talk, we apply methods from algebraic geometry to study uniform matrix product states. Matrix product states and uniform matrix product states play a crucial role in quantum physics and quantum chemistry [3, 6, 7, 9, 10, 12]. We discuss geometric and topological properties of the uniform matrix product states $\mathrm{uMPS}(D, d, N)$ and the Zariski closure $\overline{\mathrm{uMPS}(D, d, N)}$. As an application of our methods we confirm two conjectures of Critch and Morton [2].

Further, using representation theory we provide a full description of the uMPS in the case of products of length 4 of two 2×2 matrices. So far only the defining equation of the variety was known – we provide a full description of the dense, proper subset $\mathrm{uMPS}(2, 2, 4)$. This is related to the probabilistic graphical models known as hidden Markov models and to the conjecture of Bray-Morton-Sturmfels [1]. A variant of this conjecture states that for any fixed D and d, the ideal of $\mathrm{uMPS}(D, d, N)$ is generated by quadrics for N large enough. One of the tools we use is the *trace algebra* [2, 8, 11]. We show how this method can be used to derive the conjectured description of the ideal of $\overline{\mathrm{uMPS}(2, 2, 5)}$. Further, we provide a full description of the ideal of $\overline{\mathrm{uMPS}(2, 2, 6)}$.

The very important questions of the closedness of families of tensors that allow representations as matrix product states were asked by W. Hackbusch and L. Grasedyck (cf. [4, 5]). One of the questions was, when $\mathrm{uMPS}(D, d, N)$ and $\overline{\mathrm{uMPS}(D, d, N)}$ may differ. We answer the question when $\mathrm{uMPS}(D, d, N)$ is closed, i.e. both sets are equal, in the case $D = 2$. Further, we provide an explicit tensor (the so-called W*-state*) which is always in $\overline{\mathrm{uMPS}(D, d, N)}$, but not in $\mathrm{uMPS}(D, d, N)$ when N is large compared to D, providing many instances where $\mathrm{uMPS}(D, d, N)$ is not closed. Making this precise requires investigating the so-called injectivity radius. Moreover, we discuss the dimension of $\overline{\mathrm{uMPS}(D, d, N)}$ and the connectedness in a more general set-up.

References

[1] Bray, Nicolas and Morton, Jason, *Equations defining hidden Markov models*, Algebraic statistics for computational biology, 237–249, Cambridge Univ. Press, New York, 2005.

[2] Critch, Andrew and Morton, Jason, *Algebraic Geometry of Matrix Product States*, SIGMA, 10, 2014.

[3] Hackbusch, Wolfgang, *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, volume 42, Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Harris, Corey and Michałek, Mateusz and Sertöz, Emre Can, *Computing images of polynomial maps*, arXiv preprint arXiv:1801.00827, 2018.

[5] Landsberg, Joseph M and Qi, Yang and Ye, Ke, *On the geometry of tensor network states*, Quantum Information & Computation, 12(3-4):346-354, 2012.

[6] Orús, Román, *A practical introduction to tensor networks: Matrix product states and projected entangled pair states*, Annals of Physics, 349:117-158, 2014.

[7] Perez-Garcia, D. and Verstraete, F. and Wolf, M. M. and Cirac, J. I., *Matrix product state representations*, Quantum Inf. Comput., 7(5-6):401-430, 2007.

[8] Procesi, C., *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, Advances in Math., 19(3):306-381, 1976.

[9] Sanz, Mikel and Perez-Garcia, David and Wolf, Michael M. and Cirac, Juan I., *A Quantum Version of Wielandt's Inequality*, IEEE Transactions on Information Theory, 56(9):4668-4673, 2010.

[10] Schollwöck, Ulrich, *The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states*, Annals of Physics, 326(1):96-192, 2011.

[11] Sibirskii, K. S., *Algebraic invariants for a set of matrices*, Siberian Mathematical Journal, 9:115-124, 1968.

[12] Ye, Ke and Lim, Lek-Heng, *Tensor network ranks*, arXiv preprint 1801.02662, 2018.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Vinberg's most algebraic K3 surfaces and related IHS 4-folds

Maria Donten-Bury
m.donten@mimuw.edu.pl
Institute of Mathematics, University of Warsaw

Two K3 surfaces with maximal Picard number, X_3 and X_4, were considered by Vinberg in [2] and called by him 'the most algebraic K3 surfaces'. We investigate IHS manifolds related to them.

As shown in [1], the Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}^2(X_4)$ is a double cover of a very special EPW sextic, which leads to an example of a complete family of 20 incident planes in $\mathbb{P}^5$. In a joint project with G. Kapustka we explore birational geometry of $\mathrm{Hilb}^2(X_3)$ and look for similar phenomena as observed for X_4. In particular, we investigate Vinberg's algorithm for finding a fundamental polyhedron of the action of a group generated by roots in a hyperbolic lattice.

References

[1] M. Donten-Bury, B. van Geemen, G. Kapustka, M. Kapustka and J. A. Wiśniewski, *A very special EPW sextic and two IHS fourfolds*, Geom. Topol. **21(2)**: 1179–1230 (2017).

[2] E. B. Vinberg, *The two most algebraic K3 surfaces*, Math. Ann. **265(1)**: 1–21 (1983).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Hipoteza SHGH i niewymierność stałych Seshadriego

Łucja Farnik

Lucja.Farnik@gmail.com

Uniwersytet Pedagogiczny

Stałe Seshadriego mierzą dodatniość wiązek liniowych. Są istotnym przedmiotem badań w geometrii algebraicznej, były wykorzystane m.in. do zrozumienia, które spolaryzowane rozmaitości abelowe są jakobianami krzywych, w problemie pakowania symplektycznego, w teorii brył Okounkova.

Jednym z otwartych problemów jest zagadnienie wymierności stałych Seshadriego. Ciekawe są dwa, pozornie analogiczne, problemy: czy dla wiązki szerokiej L na gładkiej powierzchni rzutowej X *stała Seshadriego w punkcie bardzo ogólnym* jest zawsze wymierna oraz czy *globalna stała Seshadriego* jest zawsze wymierna.

Przedstawię różnicę między własnościami stałych Seshadriego w punkcie bardzo ogólnym oraz globalnych stałych Seshadriego. Na podstawie prac [1] i [2] omówię rezultaty dotyczące istnienia niewymiernej stałej Seshadriego w obydwu przypadkach, przy założeniu pewnych wersji hipotezy SHGH.

Bibliografia

[1] M. Dumnicki, A. Küronya, C. Maclean and T. Szemberg, *Rationality of Seshadri constants and the Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz conjecture*, Adv. Math. **303**: 1162–1170, (2016).

[2] Ł. Farnik, K. Hanumanthu, J. Huizenga, D. Schmitz and

T. Szemberg, *Rationality of Seshadri constants on general blow ups of* $\mathbb{P}^2$, arXiv:1901.02140.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Ekwiwariatne rozszczepianie ciągu Hodge'a–de Rhama

Jędrzej Garnek

jgarnek@amu.edu.pl

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Kohomologia de Rhama gładkiej rozmaitości rzutowej nad $\mathbb{C}$ rozkłada się na sumę części pochodzących od kohomologii Hodge'a. Dla rozmaitości algebraicznych nad dowolnymi ciałami rozkład ten można zastąpić przez ciąg spektralny. W wielu przypadkach ciąg ten degeneruje się na pierwszej stronie, co w szczególności prowadzi do tzw. ciągu dokładnego de Hodge'a-Rhama. Podczas referatu rozważymy ciąg Hodge'a–de Rhama rozmaitości algebraicznej z działaniem skończonej grupy. Zastanowimy się, kiedy ciąg ten rozszczepia się ekwiwariatnie, wykorzystując kohomologię grupową snopów. Powiążemy również ten problem z podnoszeniem działania grupowego na krzywych do pierścienia wektorów Witta długości 2.

Bibliografia

[1] P. Deligne and L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Invent. Math., 89(2):247–270, 1987.

[2] J. Garnek, *Equivariant splitting of the Hodge–de Rham exact sequence*, preprint

[3] B. Köck and J. Tait, *On the de-Rham cohomology of hyperelliptic curves*, Res. Number Theory, 4(2):4:19, 2018

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

O pewnych zastosowaniach różniczkowej teorii Galois w afinicznej geometrii algebraicznej

Zbigniew Hajto
zbigniew.hajto@uj.edu.pl
Uniwersytet Jagielloński

W moim referacie przedstawię kilka fundamentalnych zastosowań różniczkowej teorii Galois w geometrii algebraicznej, poczynając od teorii Picarda -Vessiota i uogólnionej wersji twierdzenia L.A. Campbella o odwracaniu odwzorowań wielomianowych [1], przez teorię reprezentacji i kategorie Tannaki [2], do algebraicznej teorii rozszerzeń mocno normalnych i związku automorfizmów wielomianowych z izomorfizmem algebr z różniczkowaniem w naturalny sposób skojarzonych z pierścieniami współrzędnych rozmaitości afinicznych [3]. Na zakończenie omówię zastosowanie rozszerzeń mocno normalnych w efektywnej teorii nakryć Galois.

Bibliografia

[1] T. Crespo, Z. Hajto, *Picard-Vessiot theory and the Jacobian problem*, Israel J. Math. **186**: 401–406 (2011).

[2] T. Crespo, Z. Hajto,M. van der Put, *Real and p-adic Picard-Vessiot fields*, Math. Ann. **365**: 93–103 (2016).

[3] E. Adamus, T. Crespo, Z. Hajto, *Jacobian Conjecture via Differential Galois Theory*, SIGMA **15**: 034, 7pp. (2019).

[4]

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Uogólnienia rozkładu Białynickiego-Biruli

Joachim Jelisiejew
jjelisiejew@impan.pl
Polska Akadema Nauk

Klasyczny rozkład Białynickiego-Biruli [2] stosuje się do działania jednowymiarowego torusa $\mathbb{G}_m$ na gładkiej rozmaitości. W ostatnim czasie zaproponowano uogólnienie tego rozkładu na działania grup reduktywnych na schematach skończonego typu [1, 3, 4]. W referacie przypomnę intuicję i podstawowe wyniki dotyczące tego uogólnienia, po czym skonstruuję jego odpowiednik w przypadku najdalszym od reduktywnego: dla grupy addytywnej $\mathbb{G}_a$.
Wyniki przedstawione na wykładzie zostały otrzymane wspólnie z Łukaszem Sienkiewiczem.

Bibliografia

[1] Jarod Alper, Jack Hall, David Rydh, *A Luna étale Slice Theorem for Algebraic Stacks* arxiv:1504.06467, 2015.

[2] Andrzej Białynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. (2), 98:480–497, 1973.

[3] Vladimir Drinfeld, *On algebraic spaces with an action of* $\mathbb{G}_m$ arXiv:1308.2604., 2013.

[4] Joachim Jelisiejew and Łukasz Sienkiewicz, *Białynicki-Birula decomposition for reductive groups* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2019.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Exceptional divisors of contractions of hyper-Kähler fourfolds

Grzegorz Kapustka
email: grzegorz.kapustka@uj.eu.pl
Uniwersytet Jagielloński

We study the geometry of exceptional divisors of birational contractions of ihs fourfolds. We find relations between the above objects and classical geometric constructions. This is a joint work in progress with B. van Geemen.

Bibliografia

[1] G.Kapustka, A.Verra, *On the Morin problem of higher length* arxiv.

• Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Quadric fibrations from symmetric resolutions

Michał Kapustka
michal.kapustka@impan.pl
Polska Akademia Nauk

Let $\mathcal{C}$ be a general two torsion sheaf on a plane curve $C \subset \mathbb{P}^2$ of degree $2d$. It is known that $\mathcal{C}$ admits a free resolution of the form:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1-d)^d \xrightarrow{M} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1-d)^d \to \mathcal{C} \to 0$$

with M being a symmetric matrix with quadric entries. The latter gives rise to a family of quadrics in $\mathbb{P}^{d-1}$ paramterized by $\mathbb{P}^2$, hence a quadric fibration of dimension d over $\mathbb{P}^2$. However, $\mathcal{C}$ admits many more symmetric locally free resolutions of the shape

$$0 \to \mathcal{G}^\vee \xrightarrow{T} \mathcal{G} \to \mathcal{C} \to 0,$$

with $\mathcal{G}$ a locally free sheaf of fixed rank k and T a symmetric map. Each of them induces a quadric fibration of dimension k over $\mathbb{P}^2$. By investigating the associated Brauer classes we look for birational transformations of quadric bundles arising from different symmetric locally free resolutions of a given two torsion sheaf on a plane curve as above. As an application we prove that a general one nodal Gushel-Mukai fourfold X is birational to a Verra fourfold.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

The closedness theorem and desingularization over Henselian valued fields with analytic structure

Krzysztof Jan Nowak
nowak@im.uj.edu.pl
Uniwersytet Jagielloński

The talk is concerned with rigid analytic geometry in the general setting of Henselian valued fields with separated analytic structure (developed by Cluckers–Lipshitz–Robinson), which unifies earlier approaches and provides reasonable quantifier elimination. Since the rings of global analytic functions with two kinds of variables seem not to have good algebraic properties, the usual global resolution of singularities from rigid analytic geometry is no longer at our disposal. Two recent results of ours will be presented: the closedness theorem and a definable version of the canonical desingularization algorithm due to Bierstone–Milman. The former enables, in particular, application of resolution of singularities to problems which involve the topology induced by the valuation. The latter is carried out within a category of definable strong analytic maps, which is more flexible than that of affinoid maps. Both these results, along with elimination of valued field quantifiers, will be applied to some topological problems such as the existence of definable retractions or extending continuous definable functions. Our treatment of the problems under study via strong analytic maps allows us not to appeal to the theory of quasi-rational domains. Note also that the earlier techniques and approaches to the purely topological versions of those problems cannot be carried over to the definable settings because, among others, non-Archimedean geometry over non-locally compact fields suffers from lack of definable Skolem functions.

References

[1] E. Bierstone, P.D. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Inventiones Math. **128**: 207–302 (1997).

[2] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-Archimedian Analysis: a systematic approach to rigid analytic geometry*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1984.

[3] R. Cluckers, L. Lipshitz, Z. Robinson, *Analytic cell decomposition and analytic motivic integration*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **39**: 535–568 (2006).

[4] R. Cluckers, L. Lipshitz, *Fields with analytic structure*, J. Eur. Math. Soc. **13**: 1147–1223 (2011).

[5] R. Cluckers, L. Lipshitz, *Strictly convergent analytic structures*, J. Eur. Math. Soc. **19**: 107–149 (2017).

[6] L. Lipshitz, Z. Robinson, *Rings of Separated Power Series and Quasi-Affinoid Geometry*, Astérisque **264**: (2000).

[7] L. Lipshitz, Z. Robinson, *Uniform properties of rigid subanalytic sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **357**: 4349–4377 (2005).

[8] K.J. Nowak, *Some results of algebraic geometry over Henselian rank one valued fields*, Sel. Math. New Ser. **23**: 455–495 (2017).

[9] K.J. Nowak, *A closedness theorem and applications in geometry of rational points over Henselian valued fields*, arXiv:1706.01774 [math.AG] (2017).

[10] K.J. Nowak, *Some results of geometry over Henselian fields with analytic structure*, arXiv:1808.02481 [math.AG] (2018).

[11] K.J. Nowak, *Definable retractions and a non-Archimedean Tietze–Urysohn theorem over Henselian valued fields*, arXiv:1808.09782 [math.AG] (2018).

[12] K.J. Nowak, *Definable retractions over complete fields with separated power series*, arXiv:1901.00162 [math.AG] (2019).

[13] K.J. Nowak, *Definable transformation to normal crossings over Henselian fields with separated analytic structure*, arXiv:1903.07142 [math.AG] (2019).

[14] M. Temkin, *Functorial desingularization over $\mathbb{Q}$: boundaries and the embedded case*, Israel J. Math. **224**: 455–504 (2018).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Rozkład Beauville'a–Bogomołowa w charakterystyce $p > 0$

Maciej Zdanowicz

maciej.zdanowicz@epfl.ch

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Rozkład Beauville'a–Bogomołowa w charakterystyce zero jest twierdzeniem strukturalnym dotyczącym rozmaitości o trywialnej wiązce kanonicznej. Stwierdza on, że dla takiej rozmaitości istnieje skończone nakrycie będące produktem rozmaitości abelowych, Calabi–Yau oraz hyperkählerowskich. W trakcie wykładu zaprezentuję metodę uzyskania wersji rozkładu – wyodbrębnienia części abelowej – w charakterystyce $p > 0$ przyjmując nierestrykcjne arytmetycze założenie słabej zwyczajności. Referat jest oparty o wspólny projekt z Zsoltem Patakfalvim (EPFL).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji