100 lat PTM

podstawy matematyki, teoria mnogości i topologia ogólna

patroni sesji

Kazimierz Kuratowski, Edward Marczewski (Szpilrajn)
Andrzej Mostowski

ptm rok zał. 1919

Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich
w stuleciu Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Kraków 3 -7 września 2019

Indeks abstraktów

Baire category properties of some function spaces

Taras Banakh t.o.banakh@gmail.com
Uniwersytet im. Jana Kochanowskiego w Kielcach
i Ivan Franko National University of Lviv, Ukraina

We shall discuss the Baire type properties of the spaces $B_\alpha(X, Y)$ of Baire-α functions and $B_\alpha^{st}(X, Y)$ of stable Baire-α functions from a topological space X to a topological space Y, where $\alpha \geqslant 1$ is a countable ordinal.

References

[1] T. Banakh, S. Gabriyelyan, *Baire category properties of some Baire type function spaces*, preprint.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Snapshot of Set Theory of the Real Line

Tomek Bartoszynski tomek.bartoszynski@gmail.com
National Science Foundation, USA

In this talk I will concentrate on the following three topics

- Cardinal invariants for measure and category and relations between them encapsulated in the Cichon's Diagram. Related independence results and Cichon's Maximum.
- Families of sets of reals related to cardinal invariants and Borel Conjecture and its cousins.
- Universal sets including various families of perfectly meager sets and their connections to mainstream set theory.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Mierzalne twierdzenie Halla dla działań skończenie generowanych grup przemiennych

Tomasz Cieśla tomasz.ciesla@mail.mcgill.ca
McGill University

Współautor:
Marcin Sabok marcin.sabok@mcgill.ca
McGill University

Naszym głównym wynikiem jest mierzalna wersja twierdzenia Halla o skojarzeniach dla działań skończenie generowanych grup przemiennych. Wynika stąd w szczególności, że jeśli taka grupa działa na przestrzeni z miarą probabilistyczną w sposób wolny i zachowujący miarę, to dowolne dwa równomiernie rozłożone zbiory mierzalne równoważne przez podział skończony są równoważne przez podział skończony na mierzalne części. Stanowi to uogólnienie niedawnego wyniku

Grabowskiego, Máthégo i Pikhurki o mierzalnej kwadraturze koła i potwierdza szczególny przypadek hipotezy Gardnera.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

O znaczeniu teorii zbieżności

Szymon Dolecki dolecki@u-bourgogne.fr
Institut de Mathématiques de Bourgogne, Francja

Już w roku 1948 Gustave Choquet stwierdził nieadekwatność metod topologii ogólnej dla badań hiperprzestrzeni [2]. Używając pojęcia filtru, zastąpił przestrzenie topologiczne szerszą klasą przestrzeni zbieżności (zamkniętą ze względu na kilka ważnych operacji, dla których podklasa topologii zamknięta nie jest).

W tym sensie, związek między przestrzeniami zbieżności a topologiami porównać można do związku między liczbami zespolonymi i rzeczywistymi.

Zazwyczaj teoria zbieżności pozwala dojrzeć prostą strukturę pod sformułowaniami, które w ramach topologii są z natury rzeczy skomplikowane, czy wręcz niedostępne [4]. Ta stosunkowo nowa dziedzina ma różne ważne zastosowania (na przykład, w analizie funkcjonalnej [1]) i jest otwarta dla dalszych badań [4].

Na przykładzie twierdzeń o równości liczby zupełności przestrzeni i liczby pseudo-gwiaździstości przestrzeni dualnej (podobnie w przypadku liczb ultra-zupełności i gwiaździstości) [5] widać, że badania tego typu nie są w ogóle możliwe w kontekście czysto topologicznym. Rzeczywiście, istnieją topologie o dowolnie dużej liczbie zupełności, natomiast liczba (pseudo-) gwiaździstości przestrzeni topologicznych nigdy nie przekracza jedynki [4, 3, 5].

Bibliografia

[1] R. Beattie and H. P. Butzmann, *Convergence Structures and Applications to Functional Analysis*. Kluwer Academic, 2002.

[2] G. Choquet, *Convergences* Ann. Univ. Grenoble. **23**: 55-112 (1947-48).

[3] S. Dolecki, *Elimination of covers in completeness*, Topology Proceedings. **28:** 445-465 (2004).

[4] S. Dolecki and F. Mynard, *Convergence Foundations of Topology*. World Scientific, 2016.

[5] F. Mynard, *(Ultra-) completeness numbers and (pseudo-) paving numbers*, Topology Appl. **256**: 86-103 (2019).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Metric ultraproduct of groups — simplicity and amenability

Jakub Gismatullin jakub.gismatullin@uwr.edu.pl
Uniwersytet Wrocławski i Polska Akademia Nauk

Co-authors:
Krzysztof Majcher (PWr), Martin Ziegler (Freiburg University)

The ultraproduct construction is playing an important role in model theory, topology and algebra. During my talk I will explain *metric ultraproduct construction* of groups equipped with invariant metric. Its importance to group theory became apparent recently and they are intensively studied. I will concentrate, in this context, on simplicity and amenability of metric ultraproducts of groups.

I will explain, in elementary terms, both uniform metric amenability and uniform metric simplicity of groups; including examples and potential applications. These generalize, respectively, the previously studied notions of uniform amenability and uniform simplicity.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Nieprzeliczalne ewolucje

Piotr Koszmider `piotr.koszmider@impan.pl`
Polska Akademia Nauk

Przedmiotem referatu jest ewolucja badań kilku zagadnień teoriomnogościowych w ciągu ostatnich 100 lat: Od pierwszych sformułowań i odważnych rozwiązań Sierpińskiego poprzez starcie z kalejdoskopem machiny nierozstrzygalności drugiej połowy 20 wieku do współczesnej interakcji ze strukturami matematycznymi takimi jak przestrzenie Banacha czy algebry operatorowe.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Dziedziczna własność Baire'a w hiperprzestrzeniach i przestrzeniach miar

Mikołaj Krupski `mkrupski@mimuw.edu.pl`
Uniwersytet Warszawski

Przestrzeń topologiczna X jest Baire'a jeśli przekrój przeliczalnie wielu zbiorów otwartych i gęstych w X jest gęsty. Mówimy, że X jest dziedzicznie Baire'a jeśli każda podprzestrzeń domknięta przestrzeni X jest Baire'a. W swoim referacie będę rozważał następujący problem: Załóżmy, że X jest przestrzenią metryczną ośrodkową. Kiedy hiperprzestrzeń $K(X)$ wszystkich niepustych zwartych podzbiorów X zaopatrzona w topologię Vietorisa jest dziedzicznie Baire'a? Niedawno Gartside, Medini i Zdomskyy zauważyli, że dziedziczną własność Baire'a hiperprzestrzeni $K(X)$ można wyrazić przy pomocy własności Mengera narostu pewnego (równoważnie każdego) uzwarcenia przestrzeni X.

Pokażę związki wspomnianego wyżej faktu z pewnymi grami topologicznymi granymi w $K(X)$, będącymi modyfikacją dobrze znanej gry Banacha-Mazura. Następnie przedyskutuję analogiczne pytanie o dziedziczną własność Baire'a dla przestrzeni miar probabilistycznych $P(X)$.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Hyperspaces of infinite compacta with finitely many accumulation points

Paweł Krupski pawel.krupski@pwr.edu.pl
Politechnika Wrocławska

Co-author:
Krzysztof Omiljanowski Krzysztof.Omiljanowski@math.uni.wroc.pl
Uniwersytet Wrocławski

Vietoris hyperspaces $\mathcal{A}_n(X)$ ($\mathcal{A}_\omega(X)$) of infinite compact subsets of a metric space X which have at most n (finitely many, resp.) accumulation points are studied. If X is a dense-in-itself, 0-dimensional Polish space, then $\mathcal{A}_n(X)$ is homeomorphic to the product $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. The hyperspaces $\mathcal{A}_1(\mathbb{Q}, \{q\})$ and $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \{p\})$ of all $A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{Q})$ (resp. $A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$) which accumulate at $q \in \mathbb{Q}$ (resp. $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) are also homeomorphic to $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. If X is a nondegenerate locally connected metric continuum then hyperspaces $\mathcal{A}_n(X)$ are absolute retracts for all $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. If $X = J = [-1, 1]$ or $X = S^1$, the hyperspaces $\mathcal{A}_n(X)$ are characterized as $F_{\sigma\delta}$-absorbers in hyperspaces $\mathcal{K}(J)$ and $\mathcal{K}(S^1)$ of all compacta in J and S^1, respectively. Consequently, they are homeomorphic to the linear space $\{(x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim x_k = 0\}$ with the product topology. The hyperspaces $\mathcal{A}_\omega(X)$ for X being a Euclidean cube, the Hilbert cube, the m-dimensional unit sphere S^m, $m \geqslant 1$, or a compact m-manifold with boundary in S^m, $m \geqslant 3$, are true $F_{\sigma\delta\sigma}$-sets which are strongly $F_{\sigma\delta}$-universal in the respective hyperspaces of all compacta.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Conjugacy classes of automorphism groups of linearly ordered structures

Aleksandra Kwiatkowska kwiatkoa@uni-muenster.de
Uniwersytet Wrocławski i Universität Münster

In the talk, we will address the following problem: does there exist a Polish non-archimedean group (equivalently: automorphism group of a countable structure or of a Fraïssé limit) that is extremely amenable and has ample generics. In fact, it is unknown if there exists a linearly ordered structure whose automorphism group has a comeager 2-dimensional diagonal conjugacy class.

We prove that automorphism groups of the universal ordered boron tree, and the universal ordered poset have a comeager conjugacy class but no comeager 2-dimensional diagonal conjugacy class. Moreover, we provide general conditions implying that there is no comeager conjugacy class or comeager 2-dimensional diagonal conjugacy class in the automorphism group of an ordered Fraïssé limit.

This is joint work with Maciej Malicki.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Nonequivalent axiomatizations of PA and the Tarski Boundary

Mateusz Łełyk mlelyk@uw.edu.pl
Uniwersytet Warszawski

We study a family of axioms expressing "All axioms of Peano Arithmetic are true."($*$). More precisely, each such axiom states that all axioms *from a chosen axiomatization of* PA are true.

We start with a very natural theory of truth $\mathrm{CT}^-(\mathrm{PA})$ which is a finite extension of PA in the language of arithmetic augmented with a fresh predicate T to serve as a truth predicate *for the language of arithmetic*. Additional axioms of this theory are straightforward translations of inductive Tarski truth conditions. To study various possible ways of expressing ($*$), we investigate extensions of $\mathrm{CT}^-(\mathrm{PA})$ with axioms of the form $\forall x \ \big(\delta(x) \to T(x)\big)$ ($**$), where $\delta(x)$ is an arithmetical Δ_0 formula which is proof-theoretically equivalent to the standard axiomatization of PA with the induction scheme. For every such δ, the extension of $\mathrm{CT}^-(\mathrm{PA})$ with axiom ($**$) will be denoted $\mathrm{CT}^-[\delta]$.

In particular we are interested in the arithmetical strength of theories $\mathrm{CT}^-[\delta]$. The "line" demarcating extensions of $\mathrm{CT}^-(\mathrm{PA})$ which are conservative over PA from the nonconservative ones is known in the literature as the *Tarski Boundary*. So far, there seemed to be the least (in terms of deductive strength) natural extension of $\mathrm{CT}^-(\mathrm{PA})$ on the nonconservative side of the boundary (known as CT_0). In contrast to this, we prove a result showing that the theories of the form $\mathrm{CT}^-[\delta]$ can finitely axiomatize every r.e. arithmetical theory provable in CT_0. Moreover we use these theories to investigate the area below the Tarski Boundary.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Pewne topologie Grothendiecka w prostym języku

Artur Piękosz apiekosz@pk.edu.pl
Politechnika Krakowska

Smopologia na zbiorze X to rodzina $\mathcal{L}_X$ podzbiorów zbioru X, która spełnia proste warunki:
(S1) $\emptyset \in \mathcal{L}_X$,
(S2) jeśli $L, M \in \mathcal{L}_X$, to $L \cap M, L \cup M \in \mathcal{L}_X$,
(S3) $\forall x \in X\, \exists L_x \in \mathcal{L}_X\; x \in L_x$ (czyli $\bigcup \mathcal{L}_X = X$).
Elementy $\mathcal{L}_X$ nazywamy zbiorami małymi otwartymi (*smopami*). Każda smopologia wyznacza pewną konkretną topologię Grothendiecka (G-topologię), która jest lokalnie małą uogólnioną przestrzenią topologiczną w sensie Delfsa i Knebuscha.

Twierdzenie 1. [3, 4] *Kategoria lokalnie małych uogólnionych przestrzeni topologicznych i odwzorowań ściśle ciągłych jest konkretnie izomorficzna z kategorią zbiorów ze smopologiami i odwzorowań ciągłych ograniczonych.*

Takie przestrzenie były wykorzystywane w o-minimalnej teorii homotopii nad ciałami ([1,2]), w szczególności dla regularnych „parazwartych” przestrzeni lokalnie definiowalnych (smopologie pozwalają sklejać nieskończone rodziny zbiorów definiowalnych np. do przestrzeni lokalnie definiowalnych nad strukturami z topologiami). O-minimalna teoria homotopii ingeruje w teorii modeli w badaniu grup $\bigvee$-definiowalnych w strukturach o-minimalnych. Ponadto, G-topologie wykorzystywane są też w geometrii analitycznej sztywnej (ang. *rigid analytic geometry*).

Bibliografia

[1] H. Delfs, M. Knebusch, *Locally Semialgebraic Spaces*, Lecture Notes in Math. **1173**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1985.

[2] A. Piękosz, *O-minimal homotopy and generalized (co)homology*, Rocky Mountain J. Math. **43**: 573–617 (2013).

[3] A. Piękosz, *On generalized topological spaces II*, Ann. Polon. Math. **108**: 185–214 (2013).

[4] A. Piękosz, *Locally small spaces with an application*, Acta Math. Hungar. DOI: 10.1007/s10474-019-00966-x.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Teoria modeli a przestrzenie Banacha i dynamika topologiczna

Tomasz Rzepecki `tomasz.rzepecki@mail.huji.ac.il`
Hebrew University of Jerusalem

Związek między teorią modeli a dynamiką topologiczną został pierwotnie zaobserwowany w [1]. W ostatnich latach zastosowania dynamiki topologicznej w teorii modeli cieszą się dużym zainteresowaniem. W szczególności zaobserwowano ścisły związek (a w zasadzie równoważność) między pojęciami stabilności i NIP (zależności) w teorii modeli a pojęciami, odpowiednio, WAP (weak almost perodicity) i tameness pewnych naturalnych układów dynamicznych, a także (również odpowiednio) z warunkową zwartością i warunkową ciągową zwartością w słabej topologii pewnych naturalnych rodzin funkcji ciągłych na tzw. przestrzeniach typów.

Obserwacje te pozwalają na uzyskanie nowych dowodów znanych faktów w teorii modeli, ale też na udowodnienie zupełnie nowych twierdzeń.

W swoim odczycie opowiem w dużym skrócie jak w swojej pracy doktorskiej wykorzystałem klasyczne wyniki [2] aby przedstawić teoriomodelową grupę Galois dowolnej teorii przeliczalnej jako iloraz zwartej grupy polskiej.

Bibliografia

[1] *Topological Dynamics of Definable Group Actions*, Ludomir Newelski, The Journal of Symbolic Logic (marzec 2009)

[2] *Pointwise Compact Sets of Baire-Measurable Functions*, J. Bourgain, D. H. Fremlin i M. Talagrand, American Journal of Mathematics (sierpień 1978)

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Transfinite sequences of topologies and descriptive complexity

Sławomir Solecki ssolecki@cornell.edu
Cornell University, USA

We introduce a notion of filtration from one topology σ to another τ assuming that τ contains σ. Such filtrations are certain transfinite sequence of topologies interpolating between σ and τ. We consider the question of whether a filtration succeeds in reaching τ, and, if it does, at what stage it happens. Answers to these questions involve descriptive set theoretic conditions on the relationship between σ and τ. This theme arose in investigations concerning the Scott analysis of certain definable equivalence relations. If time allows, I will describe the connection with the Scott analysis.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

On a Corolful KKM Theorem

Marian Turzanski m.turzanski@uksw.edu.pl
Uniwersytet Kardynala Stefana Wyszynskiego

Co-authors:
Wladyslaw Kulpa w.kulpa@uksw.edu.pl
Uniwersytet Kardynala Stefana Wyszynskiego

Andrzej Szymanski andrzej.szymanski@sru.edu
Uniwersytet Kardynala Stefana Wyszynskiego, Slippery Rock University

Colorful versions of some classical theorems have been explored for the past four decades.

In 1982, Imre Barаný showed that if $C_0, C_1, \ldots, C_n$ are subsets of $\mathbb{R}^n$ each of them containing a point p in its convex hull, then there is colorful set $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, i.e., $c_i \in C_i$ for all i, containing p in its convex hull as well. It is referred to as the *colorful Caratheodory theorem*.

Given n KKM families of special type on an $(n-1)-$dimensional simplex, we show that it is possible to choose a single element from every KKM family to get a KKM family on that simplex. The purpose of this note is to study an aggregate (= colorful or strong colorful) version of the KKM theorem and to present some of its applications.

References

[1] I. Barаný, *A generalization of Carathéodory's theorem, Discrete Math., 40(1982), 141–152.*

[2] D. Gale, *Equilibrium in a Discrete Exchange Economy with Money*, International Journal of Game Theory 13.1(1983), 61 - 64.

[3] A. Granas, *KKM-Maps*, The Scottish Book; Mathematics from the Scottish Café with Selected Problems from the New Scottish Book, R. Mauldin ed., 2nd Edition, Birkhäuser, 2015; Chapter 5, 34 - 48.
[4] G. Kalai, R. Meshulam, *A topological colorful Helly theorem*, Advances in Mathematics 191 (2005) 305–311.
[5] B. Knaster, K. Kuratowski, and S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fundamenta Mathematicae (in German) 14, 132–137, (1929).
[6] S. Park, *Some coincidence theorems on acyclic multifunctions and applications to KKM theory*, in: Fixed Point Theory and Applications (K.-K. Tan, ed.), World Scientific Publ., River Edge, NJ, 1992, pp. 248–277.
[7] S. Park, *A History of the KKM Theory*, https://www.researchgate.net/publication/324388798

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Hilbert's 10th Problem for solutions in a subring of $\mathbb{Q}$

Apoloniusz Tyszka `rttyszka@cyf-kr.edu.pl`
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Co-author:
Agnieszka Peszek `aga.peszek@gmail.com`
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Yuri Matiyasevich's theorem states that there is no algorithm to decide whether or not a given Diophantine equation has a solution in non-negative integers. Craig Smoryński's theorem states that the set of all Diophantine equations which have at most finitely many solutions in non-negative integers is not recursively enumerable, see [2, p. 104]. Let R be a subring of $\mathbb{Q}$ with or without 1. By $H_{10}(R)$, we denote the problem of whether there exists an algorithm which for any given Diophantine equation with integer coefficients, can decide whether or not the equation has a solution in R. We prove ([1]) that a positive solution to $H_{10}(R)$ implies that the set of all Diophantine equations with a finite number of solutions in R is recursively enumerable. We show ([1]) the converse implication for every infinite set $R \subseteq \mathbb{Q}$ such that there exist computable functions $\tau_1, \tau_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ which satisfy $(\forall n \in \mathbb{N}\ \tau_2(n) \neq 0) \wedge \left(\left\{\frac{\tau_1(n)}{\tau_2(n)} :\ n \in \mathbb{N}\right\} = R\right)$. This implication for $R = \mathbb{N}$ guarantees that Smoryński's theorem follows from Matiyasevich's theorem.

References

[1] A. Peszek and A. Tyszka, *Hilbert's 10th Problem for solutions in a subring of* $\mathbb{Q}$, `http://philarchive.org/rec/PESOSR`, to appear in *Scientific Annals of Computer Science*.
[2] C. Smoryński, *A note on the number of zeros of polynomials and exponential polynomials*, J. Symbolic Logic 42 (1977), no. 1, 99–106, `http://doi.org/10.2307/2272324`.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Siła teoriodowodowa kompozycyjnych predykatów prawdy

Bartosz Wcisło b.wcislo@mimuw.edu.pl
Uniwersytet Warszawski

Aksjomatyczne teorie prawdy powstają przez dołączenie do odpowiednio silnej teorii, takiej jak arytmetyka Peano PA, nowego predykatu jednoargumentowego $T(x)$ wraz z aksjomatami rządzącymi tym predykatem. Własności nałożone na predykat T mają wychwytywać intuicyjne własności predykatu „x jest kodem zdania prawdziwego".

Przykładem naturalnej teorii opisującej predykat prawdy jest ZFC^- (compositional truth), Teoria ta powstaje przez dołączenie do PA aksjomatów kompozycyjnych dla zdań arytmetycznych. Aksjomaty kompozycyjne opisują, jak prawdziwość zdań złożonych zależy od prawdziwości zdań syntaktycznie prostszych, np. $\phi \wedge \psi$ jest prawdziwe dokładnie wtedy, gdy oba zdania ϕ, ψ są prawdziwe.

Klasyczny wynik, który można przypisać Tarskiemu, głosi, że ZFC^- z pełnym schematem indukcji dla formuł zwierających predykat prawdy, nazywana ZFC, może udowodnić niesprzeczność arytmetyki Peano, a zatem dowodzi więcej zdań arytmetycznych niż PA. Z drugiej strony Kotlarski, Krajewski i Lachlan pokazali, że konsekwencje arytmetyczne samej teorii ZFC^- nie wychodzą poza PA.

W naszym referacie opiszemy wyniki dotyczące teorii pośrednich między ZFC^- a ZFC, a w szczególności tego, które naturalne fragmenty ZFC mają konsekwencje arytmetyczne wykraczające poza PA.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Mycielski among trees

Szymon Żeberski szymon.zeberski@pwr.edu.pl
Politechnika Wrocławska

Two-dimensional version of the classical Mycielski theorem says that for every comeager or conull set $X \subseteq [0,1]^2$ there exists a perfect set $P \subseteq [0,1]$ such that $P \times P \subseteq X \cup \Delta$. We consider generalizations of this theorem by replacing a perfect square with a rectangle $A \times B$, where A and B are bodies of other types of trees with $A \subseteq B$. In particular, we show that for every comeager G_δ set $G \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ there exist a Miller tree M and a uniformly perfect tree $P \subseteq M$ such that $[P] \times [M] \subseteq G \cup \Delta$ and that P cannot be a Miller tree. In the case of measure we show that for every subset F of $2^\omega \times 2^\omega$ of full measure there exists a uniformly perfect tree $P \subseteq 2^{<\omega}$ such that $[P] \times [P] \subseteq F \cup \Delta$ and no side of such a rectangle can be a body of a Silver tree or a Miller tree.

The results were obtained jointly with Robert Rałowski and Marcin Michalski.

References

[1] M. Michalski, R. Rałowski, S. Żeberski, Mycielski among trees, https://arxiv.org/abs/1905.09069

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji