



teoria liczb

patron sesji: Wacław Sierpiński



Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich
w stulecie

Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Kraków 3 -7 września 2019

Spis treści

Teoria liczb

5

■ ■ 6 Dorota Blinkiewicz

Badanie liniowej zależności punktów w grupach typu Mordella–Weila

■ ■ 7 Jakub Byszewski, Gunther Cornelissen, Marc Houben, Lois van der Meijden

Punkty okresowe endomorfizmów grup algebraicznych w dodatniej charakterystyce

■ ■ 9 Jędrzej Garnek

Torsja różności abelowych nad ciałami p -adycznymi

■ ■ 10 Paweł Gładki

Inspiracje szkołą Sierpińskiego wśród śląskich algebraików

■ 11 Tomasz Jędrzejak, Andrzej Dąbrowski
Krzywe eliptyczne o dobrej redukcji poza dwiema liczbami pierwszymi

■ 12 Aleksandra Kaim-Garnek
Moduł Tate'a różnorodności abelowej IV typu

■ 14 Jakub Konieczny
Automatic sequences, nilsystems, and higher order Fourier analysis

■ 16 Przemysław Koprowski, Alfred Czogała
Punkty parzyste na krzywych arytmetycznych

■ 17 Piotr Krasoń
Linear relations in algebraic groups

■ 19 Borys Kuca
Wielomianowe twierdzenie Szemerédiego

■ 21 Jolanta Marzec
O współczynnikach Fouriera dla form modularnych Siegela stopnia 2

■ 22 Łukasz Merta
Porównanie własności formalnych odwrotności wybranych ciągów automatycznych

■ 24 Piotr Miska, Maciej Ulas

O jedynkach w rozwinięciach pierwiastków kwadratowych z liczb pierwszych w ułamki łańcuchowe

■ 26 Bartosz Naskręcki

Hypergeometric differential equations and hypergeometric motives

■ 27 Tadeusz Pezda

Efektywne znajdowanie cykli wielomianowych

■ 29 Maciej Radziejewski

Quantitative factorization problems in analytic monoids

■ 30 Bartosz Sobolewski

Cyklotomiczne własności wielomianów zadanych przez ciągi automatyczne

■ 32 Yoichi Uetake, Grzegorz Banaszak

Abstrakcyjna teoria przecięć

■ 34 Maciej Ulas

Uogólnienie twierdzenia Schura i zastosowania

■ 35 Błażej Wróbel, Jean Bourgain, Mariusz

Mirek, Eliast Stein

Dimension-free estimates for discrete maximal functions and number theoretic questions related to them

■ 36 Maciej Zakarczemny

On the Davenport constant

■ 38 Błażej Żmija

Konstrukcje dużych zbiorów z własnością P

Badanie liniowej zależności punktów w grupach typu Mordella–Weila

Dorota Blinkiewicz

dorota.blinkiewicz@amu.edu.pl

Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

W 1975 roku, prof. Andrzej Schinzel, (którego promotorem rozprawy doktorskiej był prof. Wacław Sierpiński), rozwiązał problem badania liniowej zależności punktów w grupie Mordella–Weila jednowymiarowego torusa nad ciałem liczbowym. Prof. Schinzel pokazał również, że taka własność nie może zajść dla torusów o wyższym wymiarze. Praca A. Schinzla zainspirowała wielu matematyków do zgłębiania problemu badania liniowej zależności punktów w grupach Mordella–Weila innych obiektów.

W trakcie tego wykładu omówimy związek badania liniowej zależności punktów z badaniem współmierności podgrup w grupach abelowych (typu Mordella–Weila) ze skończoną podgrupą torsyjną. Omówimy również związki tegoż zagadnienia z problemem logarytmu dyskretnego.

Bibliografia

- [1] A. Schinzel, *On power residues and exponential congruences*, Acta Arithmetica **27**: 397–420 (1975).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Punkty okresowe endomorfizmów grup algebraicznych w dodatniej charakterystyce

Jakub Byszewski

jakub.byszewski@uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Przedmiotem referatu są punkty okresowe endomorfizmów grup algebraicznych oraz tzw. odwzorowań dynamicznie afinicznych nad ciałami dodatniej charakterystyki. Klasa ta zawiera analogony klasycznych endomorfizmów torusa, odwzorowań Czebyszewa i Lattès, a także endomorfizmy półprostych grup algebraicznych. Punkty okresowe są zliczane przez dynamiczną funkcję dzeta wprowadzoną przez Artina i Mazura, która w przypadku endomorfizmu Frobeniusa na rozmaitości nad ciałem skończonym pokrywa się z klasyczną funkcją dzeta Weila. W referacie omówimy problem wymierności funkcji dzeta, sformułujemy wyniki asymptotyczne dotyczące liczby punktów okresowych oraz sformułujemy dychotomię określającą czy funkcja dzeta jest wymierna (lub czasem – jest pierwiastkiem z funkcji wymiernej) czy też przestępna w terminach arytmetycznych własności odwzorowania. Referat oparty jest na wspólnych pracach z G. Cornelissenem, M. Houbenem i L. van der Meijden.

Bibliografia

- [1] J. Byszewski, G. Cornelissen, *Dynamics on abelian varieties in positive characteristic*, Algebra & Number Theory, vol. **12-9** (2018), 2185–2235.
- [2] J. Byszewski, G. Cornelissen, M. Houben, *Dynamically*

affine maps in positive characteristic, to be published in Contemporary Mathematics. Appendix B joint with L. van der Meijden

- [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Torsja różności abelowych nad ciałami p -adycznymi

Jędrzej Garnek

jgarnek@amu.edu.pl

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Ustalmy różność abelową A zdefiniowaną nad ciałem liczb wymiernych. Jeżeli zanurzymy ją w ciało liczb p -adycznych dla różnych liczb pierwszych p , zachowanie jej p -torsji staje się trudne do przewidzenia. Hipoteza postawiona przez David i Westona w 2008 r. głosi, że p -torsja powinna stawać się coraz bardziej „złożona” przy p dążącym do nieskończoności. Podczas referatu omówimy wyniki związane z krzywymi eliptycznymi oraz uogólnienia hipotezy o p -torsji dla wyżej wymiarowych różności abelowych. Przedstawimy również związek hipotez o p -torsji z problemem kanonicznych podniesień w sensie Serre’a–Tate’a.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Inspiracje szkołą Sierpińskiego wśród śląskich algebraików

Paweł Gładki

pawel.gladki@us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski, Bankowa 14,
40-007 Katowice

W niniejszym referacie przypomnimy wybrane wyniki z wczesnych prac śląskich algebraików, w szczególności Szymiczka i Wakulicza, inspirowane szkołą Sierpińskiego. Początki śląskiej algebry były silnie motywowane dokonaniem szkoły warszawskiej i choć w późniejszym okresie kierunki prowadzonych na Górnym Śląsku badań zostały skierowane na inne tory, to wpływ Sierpińskiego pozostały widoczne do dzisiejszego dnia. Wydaje się, iż warto o tym przypomnieć z okazji jubileuszowego zjazdu PTM.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Krzywe eliptyczne o dobrej redukcji poza dwiema liczbami pierwszymi

Tomasz Jędrzejak

tjdrzejak@gmail.com

Uniwersytet Szczeciński

We classify elliptic curves over \mathbb{Q} with a rational point of order 2 or ≥ 4 and good reduction outside two odd primes. We also exhibit some families of elliptic curves with a rational point of order 3, collect some general existence/non-existence results, and present some information concerning upper bounds for the rank of elliptic curves of odd conductors $p^a q^b$ and with \mathbb{Q} -rational point of order 2.

Our work is a common extension (and clarification) of the work given by Ogg, Hadano, Neumann, Setzer, Edixhoven-de Groot-Top, Ivorra, Bennett-Vatsal-Yazdani, Howe, Sadek and others. It turns out that an elliptic curve with a rational point of order two belongs to one of 77 (conjecturally, infinite) families or to a finite 'exceptional set'. Elliptic curves with a rational point of order four belong to one of 16 (conjecturally, infinite) families or to a finite 'exceptional set'.

This is a joint work with Andrzej Dąbrowski.

References

- [1] A. Dąbrowski, T. Jędrzejak, *Elliptic curves over the rationals with good reduction outside two odd primes*, J. Number Theory **202** (2019), 254–277.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Moduł Tate'a rozmaitości abelowej IV typu

Aleksandra Kaim-Garnek

akaim@amu.edu.pl

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Niech A będzie prostą rozmaitością abelową nad ciałem liczbowym F z algebrą $D = \text{End}_{\bar{F}}(A) \otimes \mathbb{Q} = \text{End}_F(A) \otimes \mathbb{Q}$ oraz polaryzacją zdefiniowana nad F . Niech $T_\ell(A) := \varprojlim_k A[l^k]$ oznacza moduł Tate'a rozmaitości A .

Zakładamy, że A jest rozmaitością IV typu w klasyfikacji Alberta. Jej algebra endomorfizmów D ma totalnie rzeczywiste ciało punktów statych E_0 przy inwolucji Rosati oraz centrum E , które jest totalnie urojonym kwadratowym rozszerzeniem ciała E_0 [5]. Stosujemy dokładny opis algebry endomorfizmów dla rozmaitości IV typu oraz jej inwolucji do badania pewnych form dwuliniowych pochodzących od przekształcenia dwuliniowego Weila (Weil pairing). Przedstawimy rozkład modułu Tate'a $T_\ell(A)$ dla A , który jest zgodny z określonymi na tym module hermitowskimi formami dwuliniowymi, prowadzącymi do dokładnego opisu reprezentacji Galois grupy G_F . Ponadto porównamy otrzymane wyniki z rezultatami dla rozmaitości abelowych typów I, II i III ([1],[2],[3]). Prezentowane rezultaty są wynikiem wspólnej pracy z prof. Grzegorzem Banaszakiem.

Bibliografia

- [1] G. Banaszak, W. Gajda and P. Krasoń, *On Galois representations for abelian varieties with complex and real multiplications*, J.Number Theory 100 (2003), 117-132.

- [2] G. Banaszak, W. Gajda and P. Krasoń, *On the image of ℓ -adic Galois representations for abelian varieties of type I and II*, Doc. Math., Extra Volume: John Coates' Sixtieth Birthday (2006), 35-75.
- [3] G. Banaszak, W. Gajda and P. Krasoń, *On the image of Galois ℓ -adic representations for abelian varieties of type III*, Tohoku Math. J., 62 (2010), 163-189.
- [4] P. Deligne, *Hodge Cycles on Abelian Varieties*, in: Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties. Lecture Notes in Mathematics, vol 900. Springer, Berlin, 1982.
- [5] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1988.

[● Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Automatic sequences, nilsystems, and higher order Fourier analysis

Jakub Konieczny

jakub.konieczny@gmail.com

The Hebrew University of Jerusalem, Izrael

Automatic sequences give rise to one of the basic models of computation and have remarkable links to many areas of mathematics, including number theory, dynamics, algebra and logic. Distribution of these sequences has long been studied. During the talk we will explore this topic from the point of view of higher order Fourier analysis. As it turns out, many of the classical automatic sequences are highly Gowers uniform, while others can be expressed as the sum of a structured component and a uniform component much more efficiently than guaranteed by the arithmetic regularity lemma. We investigate the extent to which this phenomenon extends to general automatic sequences and consider some closely related problems that make sense for sparse sequences. The talk is partially based on joint work with J. Byszewski and with C. Müllner.

References

- [1] Jakub Konieczny *Generalised polynomials and integer powers* submitted, [arXiv:1905.03374](https://arxiv.org/abs/1905.03374) [math.NT].
- [2] Jakub Byszewski, Jakub Konieczny *Automatic sequences and generalised polynomials* accepted for publication in Canadian Journal of Mathematics, [arXiv:1705.08979](https://arxiv.org/abs/1705.08979) [math.NT].

- [3] Jakub Byszewski, Jakub Konieczny *Sparse generalised polynomials* Transactions of the American Mathematical Society 370 (2018), 8081–8109. DOI: [10.1090/tran/7257](https://doi.org/10.1090/tran/7257).
- [4] Jakub Konieczny *Gowers norms for the Thue-Morse and Rudin-Shapiro sequences* accepted for publication in Annales de l'Institut Fourier, available online [arXiv:1611.09985](https://arxiv.org/abs/1611.09985) [math.NT].

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Punkty parzyste na krzywych arytmetycznych

Przemysław Koprowski

przemyslaw.koprowski@us.edu.pl

Uniwersytet Śląski

Niech \mathbb{F}_q będzie ustalonym ciałem skończonym charakterystyki nieparzystej. Niech dalej K będzie ciałem funkcji algebraicznych jednej zmiennej nad \mathbb{F}_q (tj. globalnym ciałem funkcyjnym). Ciało K będziemy traktować jako ciało funkcyjne gładkiej krzywej zupełnej X nad \mathbb{F}_q . Punkt (dywizor pierwszy) $\mathfrak{p} \in X$ nazywamy *parzystym* jeżeli jego klasa w grupie Picarda krzywej jest 2-podzielna (tj. $[\mathfrak{p}] \in 2\text{Pic}X$).

Referat będzie poświęcony omówieniu pewnych, wybranych własności punktów parzystych. Po pierwsze przedstawione zostaną kryteria parzystości i gęstość zbioru punktów parzystych. Wykażemy też odpowiednik globalnego twierdzenia o kwadracie dla punktów parzystych. W końcu pokażemy, że zbiór punktów parzystych tworzy nieskończony graf nieskierowany, w którym relacja incydencji stanowi naturalne uogólnienie dobrze znanego prawa wzajemności reszt kwadratowych. Graf ten okazuje się być spójny, zaś jego średnica wynosi dokładnie 2 (dla każdego funkcyjnego ciała globalnego).

Wyniki uzyskane wspólnie z A. Czogałą.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Linear relations in algebraic groups

Piotr Krasoń

piotrkras26@gmail.com

Uniwersytet Szczeciński

We will discuss linear dependence of points in the Mordell-Weil groups of abelian varieties via the reduction maps and height function. We will give a numerical criterion for this type of the local to global criterion to hold. We also provide counterexamples which makes us think that this criterion is the best possible. We also show a variant of the local to global principle for the products of Drinfeld modules and for the étale K -theory of algebraic curves.

We phrase classical work in number theory on multiplicative relations on points and congruences, group theoretically as Hasse-principles on commutative linear algebraic groups, or tori, and ask for extensions to general – not necessarily commutative – reductive linear algebraic groups.

References

- [1] G. Banaszak, P. Krasoń, *On a local to global principle in étale K -groups of curves*, Journal of K -theory and its Applications to Algebra Geometry and Topology, **12**, (2013), pp.183-201.
- [2] G. Banaszak, P. Krasoń, *On arithmetic in Mordell-Weil groups* Acta Arith. **150** (2011), 315-337.
- [3] W. Bondarewicz, P. Krasoń, *On a reduction map for Drinfeld modules*, arXiv:1811.05631
- [4] Y. Flicker, P. Krasoń, *Multiplicative Relations on Alge-*

braic Groups, Bulletin Polish Acad. Sci. Math. **vol.65**,
no.1 (2017) pp.125-138.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Wielomianowe twierdzenie Szemerédiego

Borys Kuca

boryskuca@gmail.com

University of Manchester, Wielka Brytania

Kombinatoryczna teoria liczb bada struktury zawarte w podzbiorach liczb naturalnych i grup abelowych takie jak ciągi arytmetyczne czy rozwiązania równań liniowych. Wykorzystuje do tego tak różnorodne działy matematyki jak analityczną teorię liczb, teorię grafów, teorię ergodyczną, analizę Fouriera czy geometrię algebraiczną. Jednym z jej najważniejszych twierdzeń jest twierdzenie Szemerédiego, które mówi, że każdy gęsty podzbiór liczb naturalnych zawiera ciąg arytmetyczny o dowolnej (skończonej) długości. W 1996 r. Bergelson i Leibman uogólnili twierdzenie Szemerédiego, wykazując, że każdy gęsty podzbiór liczb naturalnych zawiera konfigurację postaci $x, x + P_1(y), \dots, x + P_m(y)$, gdzie P_1, \dots, P_m są dowolnymi wielomianami o współczynniku stałym równym zeru. W czasie tego referatu omówione zostanie twierdzenie Bergelsona i Leibmana wraz z najnowszymi odkryciami w tym kierunku.

Bibliografia

- [1] V. Bergelson and A. Leibman, *Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems*, Journal of the American Mathematical Society, **9**: 725–753 (1996).
- [2] B. Kuca, *Further quantitative bounds in the polynomial Szemerédi theorem over finite fields*, in preparation.

[3] S. Peluse, *On the polynomial Szemerédi theorem in finite fields*, Duke Mathematical Journal (2019).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

O współczynnikach Fouriera dla form modularnych Siegela stopnia 2

Jolanta Marzec

marzec@mathematik.tu-darmstadt.de

TU Darmstadt, Niemcy

Formy modularne Siegela stanowią naturalne uogólnienie klasycznych form modularnych (stopnia 1) do wyższych wymiarów. W klasycznym przypadku współczynniki Fouriera są dość dobrze zrozumiane, jako że mogą być utożsamione z wartościami własnymi tzw. operatorów Hecke. W szczególności wiemy, które współczynniki determinują formę modularną oraz mamy bardzo dobre oszacowanie ich wzrostu (dzięki pracy Deligne). Dla stopnia 2 tego typu problemy są wciąż dalekie od rozwiązania. Podczas referatu wyjaśnimy pewne ich źródła oraz przedstawimy ostatnie wyniki w tym zakresie.

Bibliografia

- [1] S. Das and W. Kohnen, *Some remarks on the Resnikoff-Saldaña conjecture*, The legacy of Srinivasa Ramanujan, Ramanujan Math. Soc., Mysore, **20**: 153–161 (2013).
- [2] J. Marzec, *Non-vanishing of fundamental Fourier coefficients of paramodular forms*, J. Number Theory **182**: 311–324 (2018).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Porównanie własności formalnych odwrotności wybranych ciągów automatycznych

Łukasz Merta

lukasz.merta.26@gmail.com

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

Niech p będzie liczbą pierwszą. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie nieskończonym ciągiem p -automatycznym o wyrazach z ciała \mathbb{F}_p . Rozważmy formalny szereg potęgowy $A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{F}_p[X]$. Jeśli $a_0 = 0$ oraz $a_1 \neq 0$, to istnieje (dokładnie jeden) taki szereg $B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathbb{F}_p[X]$, że

$$A(B(X)) = B(A(X)) = X,$$

Ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ współczynników szeregu B nazywamy *formalną odwrotnością* ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Można pokazać, że ciąg ten również jest p -automatyczny.

Podczas referatu planuję porównać ze sobą własności formalnych odwrotności wybranych ciągów 2-automatycznych. Rozważę m.in. odwrotność ciągu Thue'go–Morse'a (oraz jego uogólnień), odwrotności pewnych modyfikacji ciągu Bauma–Sweeta i ciągu Rudina–Shapiro, a także odwrotność tzw. *period doubling sequence*, czyli ciągu $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ danego wzorem

$$d_n = v_2(n + 1) \bmod 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokażę też zaskakujące przykłady na to, że dwa istotnie różne ciągi (np. ciąg Bauma–Sweeta i wspomniany *period doubling sequence*) mogą mieć formalne odwrotności o bardzo zbliżonych własnościach.

- [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

O jedynekach w rozwinięciach pierwiastków kwadratowych z liczb pierwszych w ułamki łańcuchowe

Piotr Miska

piotrmiska91@gmail.com

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

Celem referatu jest przedstawienie wyników dotyczących występowania ciągów kolejnych jedynek w rozwinięciach pierwiastków kwadratowych z liczb pierwszych w ułamki łańcuchowe. Przy założeniu prawdziwości Hipotezy H Schinza i Sierpińskiego, podam wyniki dotyczące częstotliwości występowania jedynek w rozwinięciach pierwiastków kwadratowych z liczb pierwszych w ułamki łańcuchowe. W tym celu posłużę się pewnym uogólnieniem tożsamości Cassiniego. Następnie, wykorzystując twierdzenie o ekwidystriucji ciągu pierwiastków kwadratowych liczb pierwszych modulo 1 oraz fakty z teorii miary ułamków łańcuchowych, przedstawię rezultaty dotyczące gęstości asymptotycznych liczb pierwszych (względem zbioru wszystkich liczb pierwszych) o ustalonych (niekoniecznie początkowych) wyrazach w rozwinięciach pierwiastków kwadratowych tych liczb w ułamki łańcuchowe. W szczególności podam dokładne wartości gęstości asymptotycznych dla zbiorów \mathcal{A}_k tych liczb pierwszych, których części okresowe rozwinięć ich pierwiastków kwadratowych w ułamki łańcuchowe rozpoczynają się od k jedynek, ale nie rozpoczynają się od $k + 1$ jedynek. Referat zakończę prezentacją wyników numerycznych i opartych na ich podstawie pytań i hipotez.

Są to wyniki ze wspólnej pracy z dr. hab. Maciejem Ulasem.

- [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Hypergeometric differential equations and hypergeometric motives

Bartosz Naskręcki

bartnas@amu.edu.pl

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

In this talk we will discuss what are the so-called hypergeometric motives and how one can approach the problem of their explicit construction as Chow motives in explicitly given algebraic varieties. The class of hypergeometric motives corresponds to Picard-Fuchs equations of hypergeometric type and forms a rich family of pure motives with nice L-functions. Following recent work of Beukers-Cohen-Mellit we will show how to realise certain hypergeometric motives of weights 0 and 2 as submotives in elliptic and hyperelliptic surfaces. An application of this work is the computation of minimal polynomials of hypergeometric series with finite monodromy groups and proof of identities between certain hypergeometric finite sums, which mimics well-known identities for classical hypergeometric series. This is a part of the larger program conducted by Villegas et al. to study the hypergeometric differential equations (special cases of differential equations "coming from algebraic geometry") from the algebraic perspective.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Efektywne znajdowanie cykli wielomianowych

Tadeusz Pezda

pezda@math.uni.wroc.pl

Uniwersytet Wrocławski

Dla pierścienia R i wielomianu $f(X) \in R[X]$, cyklem dla $f(X)$ nazywamy układ parami różnych elementów x_0, x_1, \dots, x_{k-1} z R dla których zachodzi

$$f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2, \dots, f(x_{k-1}) = x_0,$$

i wtedy k to długość cyklu. Oznaczmy $\text{CYCL}(R)$ jako zbiór wszystkich możliwych długości cykli dla wszystkich możliwych $f(X) \in R[X]$. Rozważając zamiast R przestrzeń R^N , a zamiast $f(X) \in R[X]$ układ N wielomianów N zmiennych, otrzymamy zbiór długości cykli w R^N i oznaczmy go przez $\text{CYCL}(R, N)$.

Dla ciała liczbowego K przez Z_K oznaczamy pierścień elementów całkowitych w K . Nas będzie interesować znalezienie $\text{CYCL}(Z_K, N)$. Zbiory $\text{CYCL}(Z_K, 1)$ dla ciał K bardzo małych stopni zostały znalezione przez Boducha, Nariewiczza i autora. W [1] znaleziono zamkniętą formułę na $\text{CYCL}(Z, N)$ (czyli $K = Q$) dla wszystkich możliwych N .

W referacie chcę omówić część dowodu następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Zbiór $\text{CYCL}(Z_K, N)$ może być efektywnie wyznaczony dla dowolnego ciała liczbowego K i dowolnego naturalnego N .*

Skupię się w większości czasu na sytuacji $N = 1$, gdzie główną rolę będą odgrywały równania typu $au + bv = c$ (tzw. 2-unit equations), z elementami odwracalnymi u, v trak-

towanymi jako zmienne. Zupetnie inna technika jest użyta dla $N \geq 2$.

Bibliografia

- [1] T.Pezda. *Cycles of polynomial mappings in several variables over discrete valuation rings and over \mathbb{Z}* , Michigan Math. J., 64, issue 1: 109–42 (2015).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Quantitative factorization problems in analytic monoids

Maciej Radziejewski

maciejr@amu.edu.pl

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Analytic monoids, recently introduced by J. Kaczorowski [1], provide an abstract framework to study various factorization problems. The most studied properties of counting functions of monoid subsets defined by factorization-related properties are the main term (i.e. the average “density” of the subset) the size of the error term, and oscillations of the error term. We present some general and some specific results in this area. The main focus of the talk is on the methods used and challenges encountered thereby. A part of this research is joint work with J. Kaczorowski.

References

- [1] J. Kaczorowski, *Analytic monoids and factorization problems*, *Semigroup Forum* **94**: 532–555 (2017).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Cyklotomiczne własności wielomianów zadanych przez ciągi automatyczne

Bartosz Sobolewski

bartosz.sobolewski@doctoral.uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Rozważmy ciąg k -automatyczny $(a_n)_{n \geq 0}$ oraz wielomiany

$$A_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m.$$

Zbadamy zachowanie $A_n(\omega_r)$, gdzie ω_r jest pierwiastkiem r -tego stopnia z jedności, zaś r i k są względnie pierwsze. W szczególności, wykażemy istnienie relacji rekurencyjnej postaci

$$\sum_{i=0}^l C_i(\omega_r) A_{k^i s n}(\omega_r) = 0, \quad (1)$$

spełnionej dla wszystkich $n \geq 1$, gdzie $s \geq 1$ jest takie, że $k^s \equiv 1 \pmod{r}$, natomiast $C_0, \dots, C_l \in \mathbb{Z}[x]$, $C_l \neq 0$ zależą jedynie od s . Jest to uogólnienie analogicznego rezultatu w pracy [1], dotyczącego ciągu Rudina–Shapiro. Podamy ograniczenie na minimalną liczbę wyrazów w równości (1) i w tym kontekście zbadamy dokładniej sytuację, gdy a_n zlicza wystąpienia ustalonego ciągu cyfr w zapisie n przy podstawie k . Zbadamy także całkowitość współczynników $C_0(\omega_r), \dots, C_l(\omega_r)$, poświęcając szczególną uwagę wielomianom zadanym przez ciąg Thuego–Morse’a.

Bibliografia

- [1] J. Brillhart, J. S. Lomont, and P. Morton, *Cyclotomic properties of the Rudin–Shapiro polynomials*, J. Reine Angew. Math. **288**: 37–65 (1976).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Abstrakcyjna teoria przecięć

Yoichi Uetake

uetake@amu.edu.pl

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

W latach czterdziestych André Weil udowodnił hipotezę Riemanna dla krzywych nad ciałami skończonymi za pomocą jego teorii przecięcia. Grzegorz Banaszak przewidział rozszerzenie tej metody, aby można było zastosować ją do funkcji dzeta Riemanna. Ten odczyt jest sprawozdaniem z mojej wspólnej pracy z Grzegorzem Banaszakiem nad tym projektem. Odczyt składa się z dwóch części:

- I. Aspekt geometryczny (strona motywiczna)
- II. Aspekt arytmetyczny (strona reprezentacji automorficznych),

które powinny być powiązane poprzez korespondencję Langlandsa.

W części I skonstruujemy model geometryczny teorii przecięć typu Weila, który jest równoważny hipotezie Riemanna (plus hipoteza, że dzeta Riemanna ma zera krotności jeden). Nazywamy tę teorię abstrakcyjną teorią przecięć a jej model — modelem standardowym. Głównymi narzędziami są:

- (1) Interpretacja widmowa dla biegunów i zer uzupełnionej funkcji dzeta Riemanna (podobnie jak przewidywał Christopher Deninger)
- (2) Jawna formuła Weila
- (3) Formuła Künnetha.

Nasza metoda powinna mieć zastosowanie do motywicznych funkcji L .

W części II skonstruujemy zespoloną przestrzeń Hilberta i operator działający na niej, którego widmo wychwytuje nie-trywialne zera (licząc krotności) automorficznej funkcji L , chociaż nie jesteśmy w stanie podać interpretacji kohomologicznej (do tej pory). Na potrzeby tej konstrukcji łączyjemy metody i techniki z teorii:

- (1) Reprezentacji automorficznych
- (2) Szeregów Eisensteina
- (3) Liniowych układów dynamicznych w przestrzeniach Hilberta.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Uogólnienie twierdzenia Schura i zastosowania

Maciej Ulas

maciej.ulas@gmail.com

Polska akademia Nauk i Uniwersytet Jagielloński

Jeden z klasycznych wyników I. Schura dotyczy wyznaczenia jawnej postaci rezultantu $\text{Res}(p_n, p_{n-1})$, gdzie ciąg $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia rekurencję postaci: $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = a_1x + b_1$ oraz dla $n \geq 2$

$$p_n(x) = (a_nx + b_n)p_{n-1}(x) - c_np_{n-2}(x).$$

Wynik Schura znajduje zastosowanie w wyznaczaniu jawnej postaci wyróżników dla pewnych klas wielomianów ortogonalnych i quasi-ortogonalnych. Celem referatu będzie rozszerzenie wyniku Schura na szerszą klasę ciągów rekurencyjnych rzędu dwa oraz przedstawienie pewnych zastosowań.

Bibliografia

- [1] I. Schur, *Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen and Hermieschen Polynome*, J. Reine Angew. Math. **165**; 52–58 (1931).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Dimension-free estimates for discrete maximal functions and number theoretic questions related to them

Błażej Wróbel

blazej.wrobel@math.uni.wroc.pl

Uniwersytet of Wrocławski

Last year, together with J. Bourgain, M. Mirek, and E. M. Stein, we initiated the study of dimension-free bounds for discrete maximal functions on \mathbb{Z}^d . The first goal of this talk is to present a positive result that we obtained for discrete Euclidean balls. Namely, I shall justify that the dyadic maximal function is bounded on $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ with a bound independent of the dimension d . The proof is based on various dimension-free estimates for exponential sums (Fourier transforms) and our approach here is local in nature. The problem of controlling in a dimension-free way the full maximal function on $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ remains open. Here a global approach and tools from number theory enter the stage. The second goal of the talk is to discuss connections between dimension-free estimates for the full maximal function and counting lattice points in high-dimensional Euclidean balls.

The talk is based on joint work with J. Bourgain, M. Mirek, and E. M. Stein. [● Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

On the Davenport constant

Maciej Zakarczemny

mzakarczemny@pk.edu.pl

Politechnika Krakowska

The Davenport constant $D(G)$ is defined as the smallest $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ such that each sequence over G of length at least t has a non-empty zero-sum subsequence. Let $ZS_m(G)$ be the least $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ such that every sequence of length t in G contains m disjoint zero-sum sequences, each of length $|G|$. In our talk we will show that:

1) $ZS_m(G) = D(G) + m|G| - 1$ it is a generalized version of Gao relation (see [2]).

2) Let $n \geq 2$ and $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$, where H_1, H_2, \dots, H_n are abelian groups of orders h_i with $h_1 | h_2 | \dots | h_n$. Then

$$s_{(n-1)\Omega(h_n)h_n}(G) \leq (n-1)^{\Omega(h_n)}(2(h_n-1) + (h_{n-1}-1) + \dots + (h_1-1) + 1),$$

where $\Omega(h_n)$ counts the total number of prime divisors of h_n .

This result is a stronger version of the result obtained by Ch. Delorme, O. Ordaz, D. Quiroz [1, Theorem 3.2].

We derive new upper bounds for the Davenport constant of rank three. We will also show a connection between $D(G)$ and smooth numbers.

References

- [1] Ch. Delorme, O. Ordaz, D. Quiroz, *Some remarks on Davenport constant*, Discrete Math. **237**: 119 – 128

(2001).

- [2] W. Gao, *A Combinatorial Problem on Finite Abelian Groups*, J. Number Theory **58**: 100–103 (1996).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Konstrukcje dużych zbiorów z własnością P

Błażej Żmija

blazej.zmija@im.uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

Niech $S = (s_j)_{j=0}^{\infty}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Mówimy, że S ma własność P , jeśli s_i nie dzieli $s_j + s_k$ dla wszystkich i, j, k spełniających $i < j, k$. Erdős i Sárközy postawili w 1970r. hipotezę, że istnieje $\alpha \in (0, 1)$ takie, że dla dowolnego ciągu S z własnością P zachodzi nierówność $|S \cap [1, N]| < N^\alpha$ dla wszystkich odpowiednio dużych liczb naturalnych N . W 2001r. Shoen pokazał tę hipotezę dla ciągów z własnością P składających się z elementów parami względnie pierwszych.

Celem referatu będzie zaprezentowanie rezultatów dotyczących konstrukcji ciągów S z własnością P takich, że $|S \cap [1, x]| > x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ dla dowolnego ε i odpowiednio dużych x . Przedstawimy też heurystyczny argument sugerujący, że hipoteza Erdösa i Sárközy'ego jest prawdziwa dla wszystkich ciągów w własnością P z wykładnikiem $\alpha = \frac{1}{2}$.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)