100 lat PTM

teoria osobliwości

patron sesji

Stanisław Łojasiewicz

rok zał. 1919

ptm

Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich

w stulecie Polskiego Towarzystwa Matematycznego

Kraków 3 -7 września 2019

Indeks abstraktów

Extensions of arc-analytic functions

Janusz Adamus jadamus@uwo.ca
Department of Mathematics, The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada N6A 5B7

A real valued function is called arc-analytic when it is analytic along every real analytic arc. Recently, there has been a great deal of interest in various classes of arc-analytic functions in the real algebraic, and more generally, semialgebraic setting. In this talk, we will present a theorem asserting that every semialgebraic arc-analytic function on an arc-symmetric set admits an arc-analytic semialgebraic extension to the entire ambient Euclidean space. This result is particularly interesting in the context of continuous rational functions on singular algebraic sets. Such functions, in general, do not admit continuous rational extensions. They do, nonetheless, admit an arc-analytic extension. Our result can also be used to characterize the arc-symmetric sets among all the semialgebraic ones. This is joint work with Hadi Seyedinejad.

References

[1] J. Adamus and H. Seyedinejad, *Extensions of arc-analytic functions*, Math. Ann. **371**: 685–693 (2018).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Approximation of maps into uniformly rational varieties by piecewise-regular maps

Marcin Bilski marcin.bilski@im.uj.edu.pl
Uniwersytet Jagielloński

A real algebraic variety W of dimension m is said to be uniformly rational if each of its points has a Zariski open neighborhood which is biregularly isomorphic to a Zariski open subset of $\mathbb{R}^m$. We will discuss approximation of continuous maps from compact subsets of real algebraic varieties into uniformly rational real algebraic varieties by piecewise-regular maps. This is joint work with Wojciech Kucharz.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Kryteria analityczności funkcji zdefiniowanych na rozmaitościach analitycznych rzeczywistych

Jacek Bochnak jack3137@gmail.com
University of Amsterdam

Funkcja $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ zdefiniowana poniżej

$$g(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^8+y(x^2-y^3)^2+z^4}{x^{10}+(x^2-y^3)^2+z^2} & , \text{gdy } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & , \text{gdy } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

jest analityczna na każdej krzywej analitycznej nieosobliwej zawartej w $\mathbf{R}^3$, ale nie jest analityczna na $\mathbf{R}^3$ (jest nieograniczona w dowolnym otoczeniu zera).

Sytuacja jest diametralnie różna, gdy zastąpimy krzywe powierzchniami analitycznymi.

Twierdzenie. Niech $f : M \to \mathbf{R}$ będzie funkcją określoną na rzeczywistej rozmaitości analitycznej wymiaru $\geqslant 3$. Załóżmy że dla każdej powierzchni analitycznej $S \subset M$ homeomorficznej z 2–wymiarową sferą S^2, restrykcja $f_{|S}$ jest analityczna.

Wtedy f jest analityczna na M.

Są również prawdziwe warianty tego twierdzenia.

References

[1] J. Bochnak, J. Siciak, *A characterization of analytic functions of several real variables*, Ann. Polonici Math. (2019) (w druku).

[2] J.Bochnak, J. Kollár, W. Kucharz, *Checking real analyticity on surfaces*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (2019) (w druku).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Szkielet i osobliwości

Maciej P. Denkowski maciej.denkowski@uj.edu.pl
Uniwersytet Jagielloński

Szkieletem M_X domkniętego, niepustego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy ogół tych punktów przestrzeni, których odległość euklidesowa od X realizowana jest w więcej niż jednym punkcie. Jakkolwiek pojęcie to jest znane od lat Ő60 XXw. i stanowi główne narzędzie rozpoznawania obrazów, na jego zwią zki z osobliwościami zbioru X zwrócono uwagę dopiero w [3]. Przedmiotem referatu jest charakteryzacja za [1] i [2] tych punktów osobliwych zbioru X (subanalitycznego lub definiowalnego w jakiejś strukturze o-minimalnej na $\mathbb{R}$), które są osiągane przez szkielet, tzn. punktów zbioru $X \cap \overline{M_X}$

Bibliografia

[1] Lev Birbrair, Maciej P. Denkowski, *Medial axis and singulari- ties*, J. Geom. Anal. 27 no. 3: 2339 – 2380 (2017),

[2] Lev Birbrair, Maciej P. Denkowski, *Erratum to: Medial axis and singularities*, arXiv:1705.02788 (2018),

[3] Maciej P. Denkowski, *On the points realizing the distance to a definable set*, J. Math. Anal. Appl. 378 no. 2: 592 – 602 (2011)

[4] Maciej P. Denkowski, *The Kuratowski convergence of medial axes*, arXiv:1602.05422 (2016).

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Generyczne odwzorowania wielomianowe

Michał Farnik Michal.Farnik@gmail.com
Uniwersytet Jagielloński

Niech $\Omega(d_1, d_2)$ oznacza przestrzeń odwzorowań wielomianowych $(f_1, f_2) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o stopniach ograniczonych przez d_1, d_2. W [1] pokazujemy, że istnieje taki podzbiór $U \subset \Omega(d_1, d_2)$ otwarty w topologii Zariskiego, że dla każdego $F \in U$ wyróżnik $\Delta(F) = F(C(F))$ jest krzywą biwymierną z krzywą punktów krytycznych $C(F)$, której jedynymi osobliwościami są ostrza i pętle. Ponadto wyznaczamy liczbę ostrzy $c(d_1, d_2)$ i pętli $n(d_1, d_2)$. Liczby te nie zależą od wyboru $F \in U$, jedynie od stopni d_1, d_2. W trakcie referatu pokażemy, że zbiór odwzorowań, które posiadają $c(d_1, d_2)$ ostrzy i $n(d_1, d_2)$ pętli jest otwarty. Ponadto dowolne dwa takie odwzorowania są topologicznie równoważne.

Bibliografia

[1] M. Farnik, Z. Jelonek and M.A.S. Ruas, *Whitney theorem for complex polynomial mappings*, arXiv:1703.09683.

● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

The Łojasiewicz exponent of non-degenerate surface singularities

Tadeusz Krasiński tadeusz.krasinski@wmii.uni.lodz.pl
Uniwersytet Łódzki

We propose a formula for the Łojasiewicz exponent of non-degenerate surface singularities i.e. the Łojasiewicz exponent of holomorphic function-germs $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ with an isolated critical point at 0. It is a generalization of the Lenarcik formula from the case of curve singularities. The formula is expressed in terms of the Newton diagram of the singularity f. ● Powrót do indeksu abstraktów sekcji

A geometric model of an arbitrary ordinary differentially closed field of characteristic zero

Stanisław Spodzieja stanislaw.spodzieja@wmii.uni.lodz.pl
Uniwersytet Łódzki

The study of differential algebras was started in the first half of the twentieth century by J. F. Ritt (1932), and continued by E. R. Kolchin and J. F. Ritt (1939), I. Kaplansky (1957) and others. The investigation of these algebras in the context of model theory was initiated by A. Robinson (1956). Despite a fairly long period of study of differential algebras, it is difficult to indicate papers where natural examples of differentially closed fields are given. By A. Seidenberg's embedding theorem (1952) we only know that: *Every countable ordinary differential field of characteristic zero F is differentially isomorphic over F to a differential subfield of the field of germs of meromorphic functions in one variable at the origin*. L. Harrington (1974) proved that *if a complete and model complete decidable theory T has the finite basis property and every quantifier-free constrained formula (in the language of T) is complete, then T has a recursively presentable prime model*. He used this model-theoretic result to construct the differential closure of any given recursively presentable differential field.

We give an elementary construction of an arbitrary differentially closed field and of a universal extension of a differential field in terms of Nash function fields. We also give a characterization of any Archimedean ordered differentially closed field in terms of Nash functions.

References

[1] L. Blum, *Differentially closed fields: a model-theoretic tour*, Contributions to algebra (collection of papers dedicated to Ellis Kolchin), 37–61, Academic Press, New York, 1977.
[2] L. Harrington, *Recursively presentable prime models*, J. Symbolic Logic 39 (1974), 305–309.
[3] J. van der Hoeven, *Transseries and real differential algebra*. Lecture Notes in Math. 1888, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
[4] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Actualités Sci. Ind. 1251, Hermann, Paris, 1957.
[5] E.R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York, 1973.
[6] E.R. Kolchin, *On universal extensions of differential fields*, Pacific J. Math. 86 (1980), 139–143.
[7] J.F. Ritt, *Differential equations from the algebraic standpoint*, AMS Colloquium Publications 14, Amer. Math. Soc., New York, 1932.
[8] J.F. Ritt, *Differential algebra*, Dover Publications, New York, 1966.
[9] J.F. Ritt, E.R. Kolchin, *On certain ideals of differential polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), 895–898.
[10] A. Robinson, *Complete theories*, North-Holland, Amsterdam, 1956.
[11] A. Robinson, *On the concept of a differentially closed field*, Bull. Res. Council Israel Sect. F 8 (1959), 113–128.
[12] A. Robinson, *Ordered differential fields*, J. Combin. Theory Ser. A 14 (1973), 324–333.
[13] G.E. Sacks, *The differential closure of a differential field*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 629–634.
[14] A. Seidenberg, *Some basic theorems in differential algebra (characteristic p, arbitrary)*, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), 174–190.
[15] A. Seidenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Ann. of Math. (2) 60 (1954), 365–374.
[16] A. Seidenberg, *Abstract differential algebra and the analytic case*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 159–164.
[17] M.F. Singer, *The model theory of ordered differential fields*, J. Symbolic Logic 43 (1978), 82–91.
[18] S. Spodzieja, *A geometric model of an arbitrary real closed field*, Pacific J. Math. 264 (2013), 455–469.
[19] S. Spodzieja, *The field of Nash functions and factorization of polynomials*, Ann. Polon. Math. 65 (1996), 81–94.

• Powrót do indeksu abstraktów sekcji

Semialgebraiczna wersja twierdzenia Calderóna-Zygmunda o regularyzacji funkcji odległości

Anna Valette anna.valette@im.uj.edu.pl
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Współautorzy:
Beata Kocel-Cynk bkocel@pk.edu.pl
Instytut Matematyki Politechniki Krakowskiej

Wiesław Pawłucki wieslaw.pawlucki@im.uj.edu.pl
Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Jednym z użytecznych narzędzi w analizie jest twierdzenie Calderóna-Zygmunda o regularyzacji mówiące, że funkcja odległości od domkniętego podzbioru $W \subset \mathbb{R}^n$ jest równoważna pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, klasy C^∞ na uzupełnieniu zbioru W. Ponadto jpochodne cząstkowe, do ustalonego rzędu, funkcji f na zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus W$ są kontrolowane przez funkcję odległości. Twierdzenie to ma szereg zastosowań m.in. w badaniu eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych. Ze względu na rozwijające się zastosowania geometrii semialgebraicznej naturalnym i interesującym pytaniem jest czy twierdzenie to zachodzi w kategorii semialgebraicznej. Celem referatu jest przedstawienie pozytywnej odpowiedzi na to pytanie. Mianowicie pokażemy dowód następującego twierdzenia **Twierdzenie.** *Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym semialgebraicznym podzbiorem, p liczbą naturalną. Istnieją wtedy stałe $m, M, B_\alpha \in \mathbb{R}$ oraz funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, która w restrykcji do zbioru $\mathbb{R}^n \setminus W$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n \setminus W$ i każdego wielowskaźnika $\alpha \in \mathbb{N}^n$ o długości $|\alpha| \leqslant p$ zachodzą:*

$$m\operatorname{dist}(x, W) \leqslant f(x) \leqslant M\operatorname{dist}(x, W), \tag{1}$$

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x)\right| \leqslant B_\alpha(\operatorname{dist}(x, W))^{1-|\alpha|}. \tag{2}$$

Na zakończenie przedstawimy kilka bezpośrednich zastosowań naszego twierdzenia w geometrii semialgebraicznej.

Bibliografia

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, *Local properties of solutions of elliptic partial differential equations*, Studia Math. **20**: 181–225 (1961).
[2] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke M. J. **84**, No. 2: 497–540 (1996). **124**: 269–280 (1997).
[3] K. Kurdyka and W. Pawłucki, *O-minimal version of Whitney's extension theorem*, Studia Math. 224: (1) 81–96(2014),.
[4] M. Shiota, *Approximation theorems for Nash mappings and Nash manifolds*, Trans. of the A.M.S. **293**, No. 1: 319–337 (1986).
[5] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
[6] J.-C. Tougeron, *Idéaux des fonctions différentiables*, Springer, 1972.
[7] A. Valette and G. Valette, *Efroymson's approximation theorem for globally subanalytic functions*, arXiv:1905.05703.

• Powrót do indeksu abstraktów sekcji