



układy dynamiczne

patroni sesji: Wiesław Szlenk



Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich
w stulecie

Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Kraków 3 -7 września 2019

Spis treści

Układy dynamiczne

4

■ ■ 4 Zbigniew Bartosiewicz

Stability of positive systems on time scales

■ ■ 6 Andrzej Biś, Wojciech Kozłowski

Dynamics of Foliated Spaces

■ ■ 8 Maciej Capiński

Geometryczny dowód dyfuzji Arnoldda, z zastosowaniem w problemie trzech ciał

■ ■ 9 Tomasz Downarowicz

Minimal subsystems of triangular maps of type 2^∞

■ ■ 11 Dominik Kwietniak

On Problem 32 from Rufus Bowen's list: classification of shift spaces with specification

■ 13 Krzysztof Leśniak

Krótki dowód zbieżności zderandomizowanego algorytmu gra chaosu dla iterowanych układów kontrakcji

■ 15 Anna Michalak

Attractors and second dual approach to Lyapunov stability

■ 17 Adrian Myszkowski

Periodic expansion in determining minimal sets of Lefschetz periods

■ 18 Tomasz Nowicki

Kilka przykładów dynamicznego spojrzenia na algorytmy

■ 19 Piotr Oprocha

Śledzenie pseudo-orbit i lokalne własności dynamiki

■ 20 Justyna Signerska-Rynkowska

Teoria rotacji w hybrydowych modelach neuronów

■ 22 Adam Śpiewak, Krzysztof Barański, Yonatan Gutman

Probabilistyczne twierdzenie Takensa o zanurzeniu

Stability of positive systems on time scales

Zbigniew Bartosiewicz

z.bartosiewicz@pb.edu.pl

Politechnika Białostocka

Consider a system $x^\Delta = f(x)$ on an arbitrary time scale \mathbb{T} , where $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is locally Lipschitz. The delta derivative $x^\Delta(t)$ of the function $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ at time $t \in \mathbb{T}$ becomes ordinary derivative $\dot{x}(t)$ if $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ and is equal to $x(t+1) - x(t)$ if $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ [1]. Assume that $f(0) = 0$, i.e. 0 is an equilibrium point of the system.

The system is *positive* if the trajectory starting from $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ (the positive cone) stays in \mathbb{R}_+^n for all $t \geq t_0$.

The system is *uniformly exponentially stable* if there are $K > 0$ and $\alpha > 0$ such that for every $t_0, t \in \mathbb{T}$ such that $t \geq t_0$, $x(t) \leq K \exp(-\alpha(t - t_0))x(t_0)$.

Let $\mu(t)$ denotes the graininess of the time scale at time t and let $\bar{\mu} = \sup_{t \in \mathbb{T}} \mu(t)$. We show the following characterization of uniform exponential stability of a linear system:

Theorem

- If $\bar{\mu} = +\infty$, then no system is uniformly exponentially stable.
- Let $\bar{\mu} < +\infty$. Positive system $x^\Delta = Ax$ is uniformly exponentially stable if and only if all the coefficients of the characteristic polynomial of the matrix A are positive.

This is an extension of a known result for continuous-time ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$) and discrete-time ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$) positive systems.

Let f be of class C^1 and $A := f'(0)$. Using [2] we can show the following

Theorem If $\bar{\mu} < +\infty$ and all the coefficients of the characteristic polynomial of the matrix A are positive, then positive system $x^\Delta = f(x)$ is uniformly exponentially stable.

The work done in the framework of the project S/WI/1/2016 and financed by the Ministry of Science and Higher Education.

References

- [1] M. Bohner and A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction and Applications*, Boston, MA: Birkhäuser, 2001.
- [2] Z. Bartosiewicz, Exponential stability of nonlinear positive systems on time scales, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 33 (2019) 143–150.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Dynamics of Foliated Spaces

Andrzej Biś

andrzej.bis@wmii.uni.lodz.pl

Uniwersytet Łódzki

Co-author:

Wojciech Kozłowski

wojciech.kozlowski@wmii.uni.lodz.pl

Uniwersytet Łódzki

The dynamics of foliated spaces in codimension one is a relatively well-known subject, it has been studied for more than 40 years. We present some history and the most outstanding results in this area. The dynamics of foliated spaces of codimension greater than one is much less understood. We present a few results and a list of open problems in this new area of the foliation theory. Moreover, we describe interrelations between foliation theory, dynamical systems and geometry of fractals. We show that dynamics of solenoids is related to dynamics of foliated spaces.

References

- [1] A. Biś, *Dynamics of Foliated Spaces in Codimension Greater than One*, Fields Institute Communications **51**:249–268 (2007).
- [2] A. Biś and W. Kozłowski, *Some remarks on Dynamical Systems of Solenoids*, Taiwanese J. Math. **22**: 1463–1478 (2018).
- [3] A. Biś and W. Kozłowski, *On minimal homeomorphisms and non-invertible maps preserving foliations*, To-

pology and its Applications **254**: 1-11 (2019).

- [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Geometryczny dowód dyfuzji Arnolda, z zastosowaniem w problemie trzech ciał

Maciej Capiński

maciej.capinski@agh.edu.pl

Akademia Górniczo-Hutnicza

Zajmiemy się problemem, w którym perturbujemy autonomiczne równanie różniczkowe posiadające zasadę zachowania energii. Pytaniem jest czy pod wpływem dowolnie małej perturbacji istnieją orbity, dla których zaobserwujemy zamianę energii o zadanej wielkości, która jest niezależna od rozmiaru perturbacji. Przedstawimy geometryczny mechanizm dowodzenia tego typu zjawisk. Dzięki niemu można dowodzić również chaotyczne własności zmian poziomów energii. Jako zastosowanie rozpatrzymy ograniczony problem trzech ciał dla układu Neptun-Tryton.

Bibliografia

- [1] M. J. Capiński, M. Gidea, *Arnold Diffusion, Quantitative Estimates and Stochastic Behavior in the Three-Body Problem*,

<https://arxiv.org/abs/1812.03665>

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Minimal subsystems of triangular maps of type 2^∞

Tomasz Downarowicz

downar@pwr.edu.pl

Politechnika Wroclawska

I will sketch the results of a paper dated 2013, inspired by the last unsolved problem in the Kolyada–Sharkovski classification program of triangular maps. The paper resolves that problem (in one of the corollaries), closing the program.

The subject of this paper is to give the description, up to topological conjugacy, of possible minimal sets of triangular maps of the square of type 2^∞ . In [2], we give a general method allowing to embed any zero-dimensional almost 1-1 extension of the dyadic odometer (in particular any dyadic Toeplitz system) as a minimal set of a triangular map of this type. In this paper we present a method (a combination of that described in [2] with one introduced in [1]) of similarly embedding a special class of zero-dimensional almost 2-1 extensions of the odometer. We conjecture that these two embedding theorems exhaust all possibilities for nonperiodic minimal sets.

References

- [1] F. Balibrea, J. Smítal, *Strong distributional chaos and minimal sets*, *Topology Appl.* **156** (2009), 1673–1678
- [2] T. Downarowicz and M. Štefánková, *Embedding Toeplitz systems in triangular maps; The last but one problem of the Kolyada–Sharkovsky classification pro-*

gram, Chaos, Solitons & Fractals **45** (2012), 1566–1572

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

On Problem 32 from Rufus Bowen's list: classification of shift spaces with specification

Dominik Kwietniak

dominik.kwietniak@uj.edu.pl

Uniwersytet Jagielloński

Rufus Bowen left a notebook containing 157 open problems and questions [1]. Problem 32 on that list asks for classification of shift spaces with the specification property. Unfortunately, there is no universally accepted agreement what does it mean “to classify” a family of mathematical objects, and Bowen didn't left any clues regarding the framework in which one should consider his problem. During the talk, I will describe a solution to this problem based on the theory of Borel equivalence relations. The main result says that (roughly speaking) there is no reasonable classification for shift spaces with the specification property. More precisely, I will show that the isomorphism relation on the space of shifts with the specification property is a universal countable Borel equivalence relation, i.e. for every countable Borel equivalence relation F , we have that F is Borel reducible to E . In other words, the classification of shift spaces with specification is as hard as such a problem can be. It follows that there is no finite set of definable invariants allowing us to distinguish isomorphic shift spaces with specification. This solves the problem provided that Bowen would agree with the notion of “classification” provided by the theory of Borel equivalence relations.

References

[1] <https://bowen.pims.math.ca/>

- [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Krótki dowód zbieżności zderandomizowanego algorytmu gra chaosu dla iterowanych układów kontrakcji

Krzysztof Leśniak

krzysztof.lesniak@mat.umk.pl

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Niech $\mathcal{F} = (X; f_i : i \in I)$ będzie skończonym *iterowanym układem funkcyjnym* (IFS) złożonym z kontrakcji Banacha $f_i : X \rightarrow X$ działających na zupełnej przestrzeni metrycznej X . Istnieje wówczas *atraktor* A układu \mathcal{F} , tzn. $F^n(S) \rightarrow A = F(A)$ (względem odległości Hausdorffa) dla wszystkich niepustych domkniętych i ograniczonych $S \subseteq X$; $F : 2^X \rightarrow 2^X$, $F(S) := \text{cl}(\bigcup_{i \in I} f_i(S))$.

Nieskończony ciąg symboli $(i_n)_{n=1}^\infty \in I^\infty$ jest *dyzjunktywny*, gdy zawiera (jako faktory) wszystkie słowa skończone nad I .

Twierdzenie (o grze chaosu). Jeśli orbita $x_n = f_{i_{n-1}}(x_{n-1})$ układu \mathcal{F} startująca w $x_0 \in X$ jest sterowana ciągiem dyzjunktywnym $(i_n)_{n=1}^\infty$, to odtwarza ona atraktor A układu \mathcal{F} jak następuje: $A = \bigcap_{m=1}^\infty \text{cl}\{x_n : n \geq m\}$.

Dowód twierdzenia opiera się na sprzężeniu \mathcal{F} z naturalnym układem symbolowym na I^∞ oraz wykorzystaniu gęstości $\{\sigma^k(i_n)_{n=1}^\infty : k \geq 1\}$ w I^∞ , gdzie $\sigma(i_n)_{n=1}^\infty = (i_{n+1})_{n=1}^\infty$.

Z powyższej zderandomizowanej wersji gry chaosu wynika natychmiast jej wersja klasyczna (probabilistyczna), w której $(i_n)_{n=1}^\infty$ jest generowany przez proces Bernoulliego, a ogólniej — przez łańcuch z odpowiednio minoryzowanymi prawdopodobieństwami warunkowymi losowania kolejnych

symboli. Warto odnotować, że twierdzenie (w wersji probabilistycznej i zderandomizowanej) prawdziwe jest również dla ogólniejszych układów, które nie mają sprzężenia z naturalnym układem symbolowym.

Bibliografia

- [1] K. Leśniak, N. Snigireva, F. Strobil, *Weakly contractive iterated function systems and beyond: A manual*, submitted; International Workshop and Conference on Topology & Applications, Kochi 2018, India.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Attractors and second dual approach to Lyapunov stability

Anna Michalak

anna.michalak@uni.lodz.pl

Uniwersytet Łódzki

In this talk we show some sufficient conditions for the origin of a general differential equation

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

with the right hand side fulfilling the Caratheodory condition, to have an attractor property. First, who introduced the concept for the system to be attractive was Andrey Polyakov (see[2]). But we show the entirely different methodology to prove that the origin have the attractive property. We give also an example of the unstable solution with the attractor property. In the second part we develop a dual approach to Lyapunov stability. The second dual approach guarantees (differently than [1]) simultaneous stability of the origin both in the primary and in dual space.

References

- [1] A. Michalak, *Dual approach to Lyapunov stability*, Non-linear Analysis: Theory, Methods and Applications 85 (2013) 174–179.
- [2] A. Polyakov, *Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of Linear Control Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Institute of Electrical and Electronics Engineers 57 (8) (2012) 2106–2110.

- [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Periodic expansion in determining minimal sets of Lefschetz periods

Adrian Myszkowski

adrian.myszkowski@pg.edu.pl

Politechnika Gdańska

We apply the representation of Lefschetz numbers of iterates in the form of so-called periodic expansion to determine the minimal set of Lefschetz periods $MPer_L(f)$. Applying this approach we present an algorithmic method for finding minimal Lefschetz periods for Morse–Smale diffeomorphisms on N_g , a non-orientable compact surface without boundary of genus g . Llibre and Sirvent in [2] calculated $MPer_L(f)$ for $1 \leq g \leq 9$. Our approach presented in [1] makes it possible to find easily $MPer_L(f)$ for much bigger values of g . This is a joint work with Grzegorz Graff and Małgorzata Małgorzatą Lebień.

References

- [1] G. Graff, M. Lebień, A. Myszkowski, *Periodic expansion in determining minimal sets of Lefschetz periods for Morse–Smale diffeomorphisms*, J. Fixed Point Theory Appl, (2019) 21:47
<https://doi.org/10.1007/s11784-019-0680-4>.
- [2] J. Llibre, V. F. Sirvent, *Minimal sets of periods for Morse–Smale diffeomorphisms on non-orientable compact surfaces without boundary*, J. Difference Equ. Appl, **19** no. 3, (2013) 402–417.

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Kilka przykładów dynamicznego spojrzenia na algorytmy

Tomasz Nowicki

tnowicki@us.ibm.com

IBM TJ Watson Research Center

Przedstawię kilka przykładów dynamicznego spojrzenia na algorytmy.

- [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Śledzenie pseudo-orbit i lokalne własności dynamiki

Piotr Oprocha

oprocha@agh.edu.pl

Akademia Górniczo-Hutnicza

W referacie przedstawimy wybrane konsekwencje własności śledzenia pseudo-orbit dla lokalnej struktury układu dynamicznego (zbiory minimalne, miary ergodyczne i entropia, punkty nieregularne, itp.).

- [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Teoria rotacji w hybrydowych modelach neuronów

Justyna Signerska-Rynkowska

justyna.signerska@pg.edu.pl

Politechnika Gdańska

Modele neuronów typu integrate-and-fire (IF), gdzie równania różniczkowe opisują ewolucję w czasie potencjału błonowego (oraz tzw. zmiennej adaptacji), a dyskretne „resetowania” odpowiadają za zjawisko powstawania potencjału czynnościowego (ang. *firing, spike*), stanowią przykład tzw. hybrydowych układów dynamicznych. Głównym narzędziem ich analizy jest *adaptation-* bądź *firing map* Φ , pozwalająca odtworzyć charakter generowanych *spike-trains*.

Klasyczną teorię rotacji Poincarégo powiązано z (jednowymiarowymi) modelami IF pobudzonymi okresowo już w latach 80-tych (np. [Keener, Hoppensteadt, Rinzel, SIAM J. Appl. Math, 1981])). Naszą uwagę poświęcimy jednak głównie modelom dwuwymiarowym, mającym zdolność generacji tzw. oscylacji mieszanych (ang. *mixed-mode oscillations*) ([Rubin, Signerska-Rynkowska, Touboul, Vidal, DCDS-B, 2017]). Sygnatury tych oscylacji można odkodować za pomocą dynamiki symbolicznej odpowiadającej orbicie odwzorowania Φ . Wykorzystuje się tutaj teorię rotacji dla nieciągłych odwzorowań odcinka/okręgu ((non-)overlapping maps, *old heavy maps*, Lorenz-like maps), w niektórych przypadkach wykazując jednoznaczny związek sygnatury z liczbą obrotu orbity Φ .

Nawiążę także krótko do modeli z prawie-okresową (p.o.)

funkcją wejścia ([Kasprzak, Nawrocki, Signerska-Rynkowska, J. Diff. Eq., 2018]), zwykle w sensie Stepanova bądź też p.o. względem miary Lebesgue'a. Tutaj z kolei można efektywnie zastosować teorię rotacji dla odwzorowań prostej \mathbb{R} z p.o. przemieszczeniem ([Kwapisz, Nonlinearity, 2000]).

- [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)

Probabilistyczne twierdzenie Takensa o zanurzeniu

Adam Śpiewak

a.spiewak@mimuw.edu.pl

Uniwersytet Warszawski

Twierdzenie Takensa o zanurzaniu [1] orzeka, że dla ustalonej d -wymiarowej rozmaitości klasy C^2 oraz liczby $k > 2d$, odwzorowanie

$$M \ni x \mapsto \Phi(x) := (h(x), h(Tx), \dots, h(T^{k-1}x)) \in \mathbb{R}^k$$

jest zanurzeniem dla generycznej pary złożonej z dyfeomorfizmu $T : M \rightarrow M$ oraz gładkiego odwzorowania $h : M \rightarrow \mathbb{R}$. Powyższy wynik, wraz z jego dalszymi rozszerzeniami, stanowi teoretyczne uzasadnienie wykorzystywanej w praktyce procedury odtwarzania układu dynamicznego na podstawie ciągu pomiarów jednowymiarowej obserwabli h . Przedstawię probabilistyczną wersję twierdzenia Takensa, która gwarantuje różnowartościowość odwzorowania Φ na zbiorze pełnej miary względem ustalonej miary probabilistycznej μ , o ile k jest większe od wymiaru Hasudorffa μ (zatem liczba wymaganych pomiarów może być zredukowana dwukrotnie względem przypadku deterministycznego). Wyniki pochodzą ze wspólnej pracy [2] z Krzysztofem Barańskim oraz Yonatanem Gutmanem.

Bibliografia

- [1] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*, Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980 (Co-

ventry, 1979/1980), Lecture Notes in Math. **898**: 366–381 (1981). Springer, Berlin–New York.

- [2] K. Barański, Y. Gutman, A. Śpiewak, *A probabilistic Takens theorem*, Preprint <https://arxiv.org/abs/1811.05959> (2019).

● [Powrót do indeksu abstraktów sekcji](#)